MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ORAL

Sylvain Arlot, Aurélien Garivier

Coefficient : 2

Durée de préparation : 1 heure

Durée de passage devant le jury : 30 minutes

Sujet : 2 exercices (le candidat n'a pas le choix de la planche mais peut traiter les exercices et les exposer dans l'ordre qu'il souhaite)

Préparation : L'usage de la calculatrice ou de tout autre document est interdit

Commentaires généraux

Nous avons été très positivement impressionnés par la qualité de la préparation des candidats, et par la finesse des raisonnements mathématiques dont ils sont capables.

Ce constat général cache bien entendu une grande diversité, les notes s'étalant entre 2 et 20. Les candidats les plus faibles (remarquablement peu nombreux) ont montré à la fois de grandes lacunes dans la connaissance de leur cours, un manque d'aisance face aux exercices qui leur étaient posés, et un manque de réactivité aux questions et indications du jury. À l'inverse, les meilleurs candidats ont réussi en un temps limité à répondre à un nombre étonnant de questions.

La répartition des notes est la suivante :

- 18 notes inférieures ou égales à 07/20 (candidats ayant de grosses lacunes *et* manquant d'habileté mathématique),
- 17 notes comprises entre 08/20 et 12/20 (prestations combinant bons et mauvais points),
- 23 notes supérieures ou égales à 13/20 (bonnes prestations), dont 9 notes supérieures ou égales à 16/20.

La moyenne des notes d'oral est de 10,8 pour un écart-type de 4,6. Parmi les admis, la moyenne s'élève à 13,2.

À propos des exercices. Nous avons comme les années précédentes balayé l'ensemble du programme, en testant pour chaque candidat un maximum de compétences. Il y avait cette année une petite innovation : le premier candidat de chaque série tirait sa planche au hasard parmi celles qui n'avaient pas encore été distribuées. Sauf exception, chaque planche était traitée par trois candidats successifs. L'intégralité des planches tirées par les candidats sont publiées et commentées ci-dessous.

Le jury a conscience que de nombreux exercices sont difficiles, et parfois trop longs pour être entièrement résolus pendant la préparation. Les dernières questions servent surtout à départager les tous meilleurs candidats. Ainsi, un candidat pouvait avoir une très bonne note sans avoir réussi grand chose seul pendant sa préparation, s'il réagissait bien aux questions du jury.

À propos du déroulement de l'oral et de la gestion du temps. Cette année, le jury laissait le choix entre deux options pour le déroulement de l'interrogation. Le choix de l'une ou l'autre option n'a pas influencé la notation du jury, qui s'est attaché à évaluer uniquement le niveau mathématique du candidat.

Quinze candidats ont choisi de disposer initialement de dix minutes pour présenter l'intégralité de leurs résultats sans intervention du jury. Cela les autorisait en général à bien mettre en valeur leur préparation, et le jury pouvait utiliser plus efficacement le temps restant pour aider le candidat à corriger ses erreurs éventuelles, afin d'aller plus loin dans les exercices.

Le bilan de cette expérience nous engage à généraliser ce type de déroulement des épreuves orales, qui sera donc imposé à tous les candidats dès la session 2011 du concours, avec les précisions suivantes :

– les candidats disposeront de dix minutes *au maximum* pour présenter ses résultats sans intervention du jury : ceux qui n'utiliseront que cinq minutes ne seront pas pénalisés pour cette raison ;
– les candidats sont encouragés à ne pas présenter l'intégralité de leurs calculs, mais plutôt à se limiter aux points les plus cruciaux ; le jury décidera pendant la reprise s'il souhaite ou non voir plus de détails.

Concernant la gestion du tableau (pendant l'exposé et ensuite), des progrès notables ont pu être appréciés ; couper virtuellement le tableau en deux et commencer en haut à gauche est un bon début. Au cours de la présentation initiale, le tableau est assez grand pour que l'on n'aie pas besoin d'effacer, pour peu que l'on sache sauter quelques détails dans les calculs.

Remarquons enfin que certains candidats ont pu penser se protéger en tentant de rester le plus longtemps possible sur les questions qu'ils avaient su préparer (quelle que soit la formule choisie). C'est un mauvais calcul : le jury s'attache à donner un maximum d'occasions aux candidats de montrer leur connaissances et leur savoir-faire à travers des indications, sans jamais les laisser sécher inutilement lorsqu'ils sont en difficulté.

Erreurs et manquements récurrents.

– Les candidats sont assez réticents à mener des calculs, même élémentaires, qui sont souvent le moyen le plus simple de répondre aux questions posées.
– Les candidats ne connaissent toujours pas l'alphabet grec ; un candidat a lu systématiquement "lambda" pour μ, ce qui ne facilite pas la compréhension du jury.
– Les candidats connaissent très mal les notions de statistiques au programme, et ne sont pas du tout à l'aise pour traiter un exercice, même élémentaire, faisant appel à ces notions.
– Aucun candidat n'a réalisé seul que si X est une variable aléatoire de loi normale centrée, alors $\mathbb{E}[X^3] = 0$ (question qui revenait dans plusieurs exercices cette année). Il s'agit pourtant d'un exemple très classique d'utilisation de l'imparité d'une fonction pour calculer une intégrale.

Commentaires détaillés sur chaque planche

Planche 1

Exercice I

(1) Les candidats ont parfois eu besoin d'aide pour reconnaître une loi géométrique.
(2) Il faut penser que D peut prendre des valeurs négatives, et traiter séparément $D \geqslant 0$ et $D < 0$. Aucun candidat n'a pensé qu'il était inutile de calculer $\mathbb{P}(D = j)$ une fois calculée $\mathbb{P}(D = j \text{ et } M = k)$.
(3) Jamais abordée.

Exercice II

(1) Question facile, mais il ne faut pas oublier qu'une intégrale peut être négative. Les candidats ont spontanément pensé à des minorations de g permettant de trouver sa limite en $+\infty$, ainsi qu'au fait que g est impaire.
(2)–(3) La clé est de trouver une expression simple pour f à partir de g et g^{-1}.
(4) Jamais abordée.

Planche 2
Exercice I
(1) Question de cours.
(2) La récurrence d'ordre deux n'a pas posé problème. Par contre, tous ont fini par majorer $\left|u_k x^k\right|$ par 2, ce qui était trop large pour donner la réponse.
(3) Deux candidats sont parvenus à utiliser la formule de récurrence satisfaite par u_n.
Exercice II
(1) Question très classique.
(2) On pouvait soit utiliser la bilinéarité de la covariance, soit écrire $X_i^{(m)} X_j^{(m)}$ comme une double somme et utiliser la linéarité de l'espérance.
(3) Un candidat a trouvé seul la bonne réponse pendant la préparation. Il fallait ici faire attention au fait que N est aléatoire.
(4) Le vocabulaire "loi jointe" a semblé poser problème : il s'agit tout simplement de la loi du n-uplet.

Planche 3
Exercice I
(1) Ces très simples calculs ont été bien réussis ; les candidats ont dans l'ensemble bien vu qu'on pouvait développer $(I-A)^2$ pour ne pas avoir à le recalculer à la main.
(2) Certains candidats invoquent la "méthode du polynôme annulateur". En réalité, il s'agit simplement de calculs élémentaires menant au fait que le spectre est inclus dans $\{0,1\}$. Restait à vérifier que 0 et 1 sont effectivement valeurs propres de A, ce qui a été moins bien traité.
(3) Bien sûr, une approche complètement calculatoire est possible (mais aucun candidat n'est arrivé au bout sans erreur). On pouvait toutefois gagner un temps certain en utilisant les questions précédentes, et en montrant que $\ker(A)+\operatorname{Im}(A)=\mathbb{R}^3$.
Exercice II
Dans la question (2), on se proposait de prouver la formule de Stein puis de l'appliquer pour calculer les moments d'une variable Gaussienne.
(1) Le jury a demandé à chaque candidat de tracer sommairement la densité de la loi Gaussienne, ce qui ne devrait pas poser de difficulté particulière.
(2) Si tous les candidats pensent à une intégration par parties, ils ne voient pas comment utiliser correctement les hypothèses pour aboutir à une preuve complète.
(3) Aucun candidat n'a pensé à distinguer les cas suivant la parité de n.
(4) Les candidats n'ont pas pensé spontanément à comparer la somme obtenue à une intégrale. Un candidat a pensé trouver un équivalent de $\exp(u_n)$ mais ne pensait pas pouvoir en déduire un équivalent de u_n.

Planche 4
Les deux exercices sont de difficultés très inégales.
Exercice I
(1) La principale difficulté est de montrer que $\phi(P)(X)$ est bien un polynôme de degré au plus 3.
(2) Tous les candidats ont réussi cette question, mais ne voient pas le lien avec la suite de l'exercice.
(3)–(4) Questions bien réussies.
Exercice II

(1) Tous les candidats raisonnent correctement, en exhibant une condition nécessaire, puis en montrant qu'elle est suffisante.
(2) Au tableau, le jury s'est focalisé sur le cas $n = 2$, $V_1 = 1$ et $V_2 = 2$, qui a tout de même posé de nombreux problèmes aux candidats.
(3) Cette question permettait aux candidats astucieux de deviner la réponse de la question (2). Elle était beaucoup plus aisée si l'on reconnaissait la variance d'une variable aléatoire bien choisie (piste suggérée aux candidats par le jury lors de l'interrogation).

Planche 7
Exercice I
(1) Nécessite de connaître la densité de la Gaussienne centrée réduite. Il faut être capable d'en tracer rapidement un graphe (notamment pour noter qu'elle est symétrique).
(3) Mène à un petit problème de minimisation que les candidats ont eu du mal à mener seuls. On a apprécié que deux des trois candidats connaissent bien la décomposition biais-variance du risque quadratique.
Exercice II
(1) Ne pas oublier des cas dans les valeurs de x ($x = -1$, $x < 0$).
(2) Nous avons été un peu déçus que les candidats ne réagissent pas immédiatement en voyant une série géométrique, et cherchent à utiliser le critère de Riemann.
(3) Exemple de comparaison série-intégrale, qui semble poser problème à certains candidats. Quand on dérive la fonction par rapport à t, faire attention à ne pas faire comme si la variable était x.

Planche 9
Exercice I
(1) Un seul candidat donne la formule correcte pour P, les autres oubliant que la demande peut être supérieure à l'offre.
(2) Le calcul de l'espérance de P pose problème, les candidats n'arrivant pas à appliquer correctement la formule de transfert.
Exercice II
Dans cet exercice, il était nécessaire de bien distinguer les deux espaces vectoriels en jeu, $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(1)–(2) Questions sans difficulté.
(3) Il est très difficile d'obtenir des candidats une preuve claire de l'équivalence demandée. On ne pouvait se dispenser de procéder par double implication, en prenant bien garde à manipuler correctement les quantificateurs.
Aucun candidat n'a essayé de trouver une base de $\mathcal{E}_A$ pour calculer sa dimension.
(4) Un candidat a essayé une méthode purement calculatoire.

Planche 10
Exercice I
Les candidats semblent bien connaître la loi exponentielle, ce dont nous nous réjouissons.
(1) Question de cours.
(2)–(3) Questions bien réussies par les candidats, qui semblent avoir bien compris comment se calculent la loi d'un max ou d'un min.
(4) Si les candidats voient bien que $U \geqslant X_1$, ils ont plus de mal à penser que $U \leqslant X_1 + X_2 + X_3$.
Exercice II
Malgré les apparences, cet exercice ne nécessitait aucune connaissance hors programme. Il fallait en revanche une bonne maîtrise des calculs matriciels élémentaires.
(1) Récurrence immédiate.
(2) Attention à ne pas faire commuter sauvagement des matrices (et a fortiori une matrice $p \times p$ et un vecteur de $\mathbb{R}^p$).

(3)–(4) Il s'agit ici d'utiliser l'idée très classique utilisée habituellement pour déterminer les valeurs possibles pour la limite d'une suite réelle définie par récurrence.

Planche 11
Exercice I
(2) Il s'agit ici de reconnaître une division euclidienne.
(4) Cette question donne un exemple d'utilisation moins usuelle des développements limités.
Exercice II
La loi des grands nombres semble bien connue des candidats.
(1)–(2) Questions très classiques.
(3) Les candidats font bien le lien avec la loi des grands nombres, mais peinent à finaliser leur preuve.
(4) Nécessite un peu d'intuition sur la convergence en probabilité.
(5) Le plus simple est de raisonner par l'absurde en utilisant les questions précédentes.

Planche 12
Exercice I
Il s'agit d'un exercice globalement facile, à propos du déterminant 2×2 (dont la connaissance n'apportait rien aux candidats).
(1)–(2) Questions très faciles et bien réussies.
(3) Un candidat s'en sort sans indications, un autre avec une indication.
(4) Il convient de ne pas oublier un détail dans la définition de "x et y liés" : on n'a pas nécessairement $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
(5) La deuxième partie étant plus abstraite, elle a été moins réussie par les candidats.
Exercice II
(1) Question de combinatoire très mal réussie.
(2) Attention, si l'on note E_j : "le sujet j n'a pas été choisi", alors les événements E_j ne sont pas indépendants.
(3) Question difficile, mais un candidat s'en sort très bien.

Planche 13
Exercice I
Le jury pensait cet exercice très classique et facile, et a été déçu par les prestations des candidats.
(1) Il faut bien vérifier que le degré de $P(X)$ est exactement deux.
(2) Si la première partie de la question est en général bien traitée, la condition d'égalité a posé beaucoup de problèmes, même avec des indications.
(3) Les candidats ne se sont vraiment pas montrés à l'aise pour manipuler les quantités en jeu, et leurs rares initiatives se sont limitées à appliquer l'inégalité triangulaire.
Exercice II
Cet exercice a été particulièrement mal traité par les candidats, alors que les questions 1–3 sont élémentaires.
(1) On rappelle que la loi uniforme sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est au programme. Un candidat ne semble connaître que les variables aléatoires discrètes.
(2) Aucun candidat n'est capable de définir ce qu'est un intervalle de confiance, ni même d'en donner un exemple quelconque tiré de son cours.
(3) Un candidat a su reconnaître un schéma de Bernoulli.

Planche 14
Exercice I
(1) Pour obtenir une réponse simple et juste, il paraissait indispensable d'introduire les fonctions indicatrices de l'événement "gain au n-ème tirage".

(2)–(3) Ne pas tomber directement sur une suite géométrique a un peu dérouté les candidats.
(3) L'étude d'une suite arithmético-géométrique est sensée ne pas poser de problème. Il s'agit ensuite de reconnaître simplement le développement asymptotique obtenu.
(4) Un candidat qui trouve que la variance de X_n est nulle devrait pouvoir se corriger seul.

Exercice II

(1) Très classique application de la formule des probabilités totales.
(2) Les candidats peinent à reconnaître qu'on leur demande une diagonalisation de la matrice M. Quand on leur indique les valeurs propres d'une matrice 2×2, ils devraient être capables de trouver les vecteurs propres, quitte à résoudre le système linéaire correspondant.
(4) Il est assez facile de voir que le noyau est de dimension 2.
(5) Question difficile, jamais abordée.

Planche 15

Exercice I

(1) Plusieurs méthodes sont possibles pour étudier f en 0, mais pas le développement limité qui tente les candidats croyant reconnaître $\ln(1+u)$.
(2) Factoriser x dans la dérivée permettait de s'épargner une dérivation en vue d'obtenir le signe de $f'(x)$.
(3)–(4) Si tous les candidats réussissent la question (3), ils ne voient en général pas comment l'utiliser pour la question (4).

Exercice II

(1) La première partie de la question a été bien traitée par les candidats, qui ne se sont toutefois pas engagés dans l'étude du biais en fonction de p.
(2) Cette question est plus facile si on commence par montrer que $1/\widehat{p}_r = N_r/r$ tend vers $1/p$, et en remarquant que N_r est une somme de variables géométriques indépendantes (ce qu'un candidat a vu sans aide).
(3) Question bien réussie par les candidats, probablement car il suffisait de justifier la réponse donnée dans l'énoncé.
(4) Avec de l'aide, un candidat a pu traiter le cas général.

Planche 16

Exercice I

Cet exercice est plutôt facile ; seul le début de la question (2) demandait un peu de recul.
(2) Deux méthodes : soit on se contente d'utiliser le fait que X est d'espérance finie, soit on utilise Bienaymé-Tchebychev (ou Markov) pour majorer $1 - F(p)$.

Exercice II

(1) On n'a pas forcément besoin de calculer ici les racines du polynôme $X^2 + X + t$ en fonction de t.
(3) Obtenir l'équivalent exact de g_t en $+\infty$ est assez délicat car il faut pousser le développement asymptotique de G_t au-delà du premier terme (on ne peut pas prendre l'exponentielle d'un équivalent).

Planche 17

Exercice I

(1) Tous les candidats trouvent sans problème les 5 points critiques. Ils éprouvent ensuite de grandes difficultés à déterminer s'il s'agit ou non d'extrema locaux.
(2) Il s'agit d'un calcul assez simple, mais la discussion qui suit n'a pas semblé aller de soi pour les candidats.
(3) Question très classique.
(4) On peut soit utiliser le théorème des extrema liés, soit étudier $f(x, 1-x)$.

Exercice II
Il s'agit d'un exercice très classique, qui n'a probablement pas beaucoup surpris les candidats (sauf pour la question (3)).

(1)–(2) Les candidats semblent à l'aise avec les variables aléatoires discrètes.

(3) Le résultat est contre-intuitif, mais les candidats l'ont rapidement prouvé une fois mis sur la voie.

Planche 18
Exercice I

(2) Il est tentant de reconnaître un schéma de Bernoulli, mais les événements “le jour k est chômé” ne sont pas indépendants. Cela n'empêche pas d'obtenir la bonne formule pour l'espérance de N.

(3) Problème d'optimisation élémentaire, bien réussi par les candidats arrivés jusque là.

Exercice II

(1)(b) Il est plus simple de reconnaître que $\mathcal{E}_A$ est un noyau plutôt que de repartir de la définition d'un sev.
Les candidats connaissent bien le théorème du rang, la seule difficulté est de ne pas oublier que la dimension de l'espace ambiant est ici n^2 et non n.

(2) On peut regretter les hésitations des candidats pour reconnaître les éléments propres d'une matrice diagonale.

(3) Simple généralisation de la question 2, qui nécessite juste une plus grande capacité d'abstraction.

(4) Grâce à l'indication, un candidat est arrivé à la fin de l'exercice.

Planche 19
Exercice I

(1)–(2) Questions classiques qui n'ont pas posé de problème aux candidats.

(3) Une petite astuce permet de calculer facilement l'espérance de P. En la poussant encore plus loin, on pouvait comparer les variances de M et de P (sans calculer la variance de P).

Exercice II

(3) Question sans difficulté, il faut montrer qu'une série converge.

(2) et (4) Tous les candidats semblent connaître la notion de comparaison série-intégrale. Celle-ci nécessitait un certain soin dans sa mise en œuvre.

Planche 20
Exercice I

(1) Le calcul de $\mathbb{E}[X^2]$ devrait être immédiat.

(2) Une fois qu'on a compris qu'il faut recentrer X, c'est une application simple de la formule du binôme.

(3) Le plus simple est de passer par une récurrence forte.

Exercice II

(1) Si les candidats voient bien pourquoi f est bien définie sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$, les valeurs $[-1,0]$ posent plus de problèmes. Aucun candidat n'arrive seul à trouver la nature de l'intégrale impropre.

(2) L'indication permettait de ne pas voir cet exercice comme un problème d'intégrale à paramètre.

Planche 21
Exercice I

(1) Question de cours.

(2) Il faut bien comprendre la modélisation, et calculer correctement la probabilité que, dans un groupe, aucune bête ne soit atteinte.

(3) Cette question mène à une étude de fonctions.

Exercice II

(1) Récurrence immédiate.

(2) Plusieurs méthodes sont possibles. On pouvait en particulier trouver un vecteur propre simple de $P^\top$, mais il faut être précis dans les liens entre les éléments propres de P et ceux de $P^\top$.

(3) Question peu réussie par les candidats.

(4) Cette question demandait de reconnaître deux suites adjacentes ; il fallait pour cela prendre un peu de recul sur les suites introduites à la question (3).

Planche 22

Exercice I

(1)–(2) Questions faciles bien traitées par les candidats.

(3) Il fallait plus d'attention, notamment dans le lien entre point critique et maximum.

(4) Nous avons été surpris qu'aucun candidat ne soit capable de comparer directement (et sans calculs) la somme des profits obtenus aux questions (1)–(2) avec le maximum obtenu à la question (3).

Exercice II

(1) et (3) Le jury s'attendait à ce que la question (1), très classique, soit bien réussie, et a constaté avec surprise leur grande difficulté à aborder les raisonnements combinatoires les plus élémentaires.

(2) Question plus astucieuse, pour laquelle le jury a pu fournir une indication : construire une bijection entre l'ensemble des tirages de ce Loto modifié avec l'ensemble des suites d'entiers de la forme $1 \leqslant b_1 < \cdots < b_5 \leqslant 53$.

Planche 23

Exercice I

Exercice classique et plutôt calculatoire, demandant surtout un peu d'aisance dans la manipulation de séries.

(2) Un bon point de départ était de remarquer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est une série télescopique.

Exercice II

Seule la question (1) a été abordée par les candidats. Si la question (2) demandait un peu d'astuce, on pouvait la sauter et répondre au moins au début de la troisième.

(1) Aucun candidat n'a remarqué que $n\widehat{p}_1$ suit une loi binômiale (ce qui permettait de répondre du même coup à la première partie de (3)).

Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$. On cherche à estimer $p = \int_5^{+\infty} \phi(x)dx$. On tire pour cela des variables $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ indépendantes de loi gaussienne centrée réduite, et on propose deux estimateurs de p :

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i > 5\}}$$

$$\hat{p}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi(X_i + 5)}{\phi(X_i)} \mathbb{I}_{\{X_i > 0\}}$$

On rappelle que, pour tout réel α, la variable aléatoire $\mathbb{I}_{\{X_i > \alpha\}}$ est égale à 1 quand X_i est supérieure à α, et nulle sinon.

(1) Montrer que $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_2$ sont deux estimateurs sans biais de p.

(2) Montrer que $p \leqslant \phi(5)/5$.

(3) Calculer la variance de $\hat{p}_1$, puis celle de $\hat{p}_2$.

(4) Quel valeur de n faut-il choisir pour estimer p à 10^{-5} près avec une confiance d'au moins 95% ? On pourra utiliser au choix $\hat{p}_1$ ou $\hat{p}_2$.