Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous pourrez signaler au jury que vous choisissez de présenter tous les résultats obtenus durant votre préparation pendant une dizaine de minutes sans intervention du jury. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

À défaut, le jury pourra intervenir dès les premières minutes de l'interrogation.

Soient X et Y deux variables aléatoires géométriques de paramètre p indépendantes. On note $M = \min(X, Y)$ et $D = X - Y$.

(1) Quelle est la loi de M ?

(2) Montrer que M et D sont indépendantes.

(3) Réciproquement, soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeur dans $\mathbb{N}^*$, telles que pour tout entier k strictement positif on ait $\mathbb{P}(X = k) > 0$. Montrer que si la variable aléatoire $\min(X, Y)$ est indépendante de la variable aléatoire $X - Y$, alors X suit une loi géométrique.
Indication : on pourra considérer le rapport
$$\frac{\mathbb{P}\big(\{X = k+1\} \cap \{Y = k\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{X = k\} \cap \{Y = k\}\big)}.$$

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g(y) = \int_0^y \exp\left(t^2\right) dt \ .$$

(1) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble à préciser.

(2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel, noté $f(x)$ vérifiant l'égalité

$$\int_x^{f(x)} \exp\left(t^2\right) dt = 1 \ .$$

(3) Étudier la continuité et la dérivabilité de f, et dresser son tableau de variations.

(4) Déterminer la limite (puis un équivalent) en $+\infty$ de $f(x) - x$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 2 \ , \qquad u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \quad u_{n+2} = \frac{3u_{n+1} - u_n}{2} \ .$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k x^k$.

(1) Préliminaire: pour tout $q \in]-1,1[$, montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} q^k$ converge et exprimer sa limite en fonction de q.

(2) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $|u_n| \leqslant 2^{n+1}$. En déduire que si $|x| < 1/2$, $f_n(x)$ converge quand n tend vers l'infini, vers une limite que l'on notera $f(x)$.

(3) Calculer $(2-3x+x^2)f_n(x)$ pour tout entier $n \geqslant 2$ et en déduire une formule simple pour $f(x)$.

(4) En déduire une formule simple pour u_n en fonction de n.

Soient $n \geqslant 1$ un entier, et $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $\{1,\ldots,n\}$. Pour tout $m \geqslant 1$ et tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, on définit

$$X_i^{(m)} = \mathrm{Card}\,\{\,k \in \{1,\ldots,m\}\ /\ U_k = i\,\} = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{I}_{\{\,U_k=i\,\}} \quad \text{et} \quad X_i^{(0)} = 0 \ .$$

(1) Quelle est la loi de $X_i^{(m)}$ pour $i \in \{1,\ldots,n\}$ et $m \geqslant 1$ fixés?

(2) Soient $m \geqslant 1$ et $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ fixés, $i \neq j$. Calculer la covariance des variables aléatoires $X_i^{(m)}$ et $X_j^{(m)}$. Sont-elles indépendantes?

(3) Soit $\lambda > 0$ et N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, indépendante de $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On pose

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \quad Y_i = X_i^{(N)} \ .$$

Déterminer, en fonction de λ et n, la loi de Y_i pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$.

(4) Déterminer la loi jointe de $(Y_1,\ldots,Y_n)$.

Soit

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer $\mathrm{Tr}(A)$, A^2 et $(I-A)^2$.

(2) Déterminer le spectre de A.

(3) La matrice A est-elle diagonalisable?

(4) Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MA = M$.

Question d'oral

Après (3), la somme de $\mathrm{Im}(A)$ et $\ker(A)$ est-elle directe? Est-ce vrai pour n'importe quelle matrice A?

Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

(1) Écrire la densité de X.

(2) Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $|g'(X)|$ et $|Xg(X)|$ admettent une espérance. Montrer que
$$\mathbb{E}\left[g'(X)\right] = \mathbb{E}\left[Xg(X)\right] \quad .$$

(3) En déduire la valeur de $\mathbb{E}\left[X^n\right]$ pour tout entier naturel n.

(4) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $u_n = \ln(\mathbb{E}[X^{2n}])$. Écrire u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire que lorsque $n \to +\infty$,
$$u_n \sim n \ln(n) \quad .$$

Pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $\phi(P(X))$ l'unique polynôme $Q(X)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad Q(x) = P(x) - \int_0^x P(t)dt \ \ .$$

(1) Montrer que ϕ est une application linéaire $\mathbb{R}_2[X] \mapsto \mathbb{R}_3[X]$.

(2) Écrire la matrice de ϕ dans les bases canoniques respectives $(1, X, X^2)$ et $(1, X, X^2, X^3)$.

(3) Déterminer le noyau de ϕ .

(4) Déterminer l'ensemble des polynômes $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que

$$\phi(P(X)) = \frac{-1}{3}X^3 + 3X^2 - 5X + 1 \ \ .$$

Question d'oral
Après (3): quel est le rang de ϕ ?

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, soient $V_1, V_2, \ldots, V_n$ des nombres réels non tous égaux, et soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des nombres réels strictement positifs tels que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. On note

$$f(x) = \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x - V_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(x - V_i).$$

(1) Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f ?

(2) Déterminer les limites de $f(x)$ aux bords $\mathcal{D}$.

(3) Montrer que f définit une bijection de $\mathcal{D}$ sur $]0, +\infty[$.

(4) Donner un équivalent de $f^{-1}(y)$ quand y tend vers 0.

On considère un échantillon de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ suivant une loi normale de moyenne nulle et de variance σ^2. On cherche à estimer σ^2 par un estimateur de la forme

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \ ,$$

où p est un nombre réel positif.

On rappelle que le *biais* de $\hat{\sigma}_p^2$ est la quantité $\mathbb{E}\left[\hat{\sigma}_p^2\right] - \sigma^2$. On appelle *risque quadratique moyen* de $\hat{\sigma}_p^2$ est la quantité :

$$R(p) = \mathbb{E}\left[\left(\hat{\sigma}_p^2 - \sigma^2\right)^2\right] \ .$$

(1) Que vaut $\mathbb{E}\left[X_1^j\right]$ pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$?

(2) Comment choisir p pour que $\hat{\sigma}_p^2$ soit sans biais ?

(3) Comment choisir p pour que $\hat{\sigma}_p^2$ soit de risque quadratique minimal ?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x) \qquad \text{avec} \qquad v_k(x) = \frac{x^k}{1 + x^{2k}} \ .$$

(1) Déterminer un équivalent de $v_k(x)$ quand $k \to +\infty$, selon les valeurs de x.

(2) Pour quelles valeurs de x la suite $u_n(x)$ admet-elle une limite lorsque n tend vers l'infini? On notera cette limite $f(x)$ lorsqu'elle existe.

(3) Pour tout $x > 1$, majorer $u_n(x)$ à l'aide de

$$\int_{I(n)} \frac{x^t}{1 + x^{2t}} dt$$

pour un intervalle $I(n)$ bien choisi.

(4) En déduire une majoration, puis un équivalent en $+\infty$, de $f(x)$.

Un charcutier fabrique chaque jour x kilos de choucroute : il la vend p euros le kilo, pour un coût de fabrication de $c < p$ euros le kilo. La demande varie d'un jour à l'autre : on la modélise par une variable aléatoire positive X dont on note F la fonction de répartition, et on suppose que F est continue. S'il lui reste de la choucroute invendue en fin de journée, il l'offre gratuitement à une association.

(1) Exprimer le profit P réalisé en une journée par la vente de choucroute en fonction de x, p, c et X .

(2) Pour des valeurs p, c et F fixées, quelle est la quantité que doit produire le charcutier pour optimiser son profit journalier moyen ?

(3) Si X suit une loi exponentielle de densité $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ avec $\lambda > 0$, proposer intervalle I contenant avec probabilité 95% le profit que le charcutier réalise en produisant la quantité prescrite dans la question (2).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit alors $\mathcal{E}_A$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AMA = 0$.

(1) Montrer que $\mathcal{E}_A$ est un espace vectoriel.

(2) Déterminer $\mathcal{E}_A$ si A est inversible.

(3) Montrer que $M \in \mathcal{E}_A$ si et seulement si $\forall X \in \mathrm{Im}(A)$, $MX \in \ker(A)$.
Quelle est la dimension de $\mathcal{E}_A$?

(4) Déterminer $\mathcal{E}_A$ si

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$$

avec a, b des réels fixés. On pourra considérer le cas $a = 1$, $b = 2$ avant de traiter le cas général.

Un sapin est décoré par trois boules lumineuses, qui contiennent chacune une ampoule. On note X_i la durée de vie de l'ampoule numéro $i \in \{1, 2, 3\}$, c'est-à-dire la durée qu'il faut attendre après l'installation du sapin avant de la voir claquer. On suppose que les variables X_i sont indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \, \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^*}(x).$$

(1) Quelle est l'espérance de la durée de vie d'une ampoule ?

(2) On note T la durée qu'il faut attendre après l'installation du sapin avec que la première des trois ampoules ne claque. Calculer $\mathbb{P}(T > x)$ pour tout $x > 0$, puis en déduire la loi de T.

(3) On note U la durée qu'il faut attendre après l'installation du sapin avec que les trois ampoules aient toutes claqué. Quelle est la loi de U ?

(4) Quelle est l'espérance de U ? Pourquoi pouvait-on attendre $1/\lambda \leqslant \mathbb{E}[U] \leqslant 3/\lambda$?

Question bonus

Le sapin est rangé fin janvier sans que les ampoules n'aient claqué. L'année suivante, on reprend les *même ampoules* pour illuminer le nouveau sapin. Faut-il s'attendre à ce que les ampoules claquent plus vite ?

Soit $p \geqslant 1$ un entier naturel. Pour tout $X \in \mathbb{R}^p$, on note $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p X_i^2}$. Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice $p \times p$ à coefficients réels et $B, X_0 \in \mathbb{R}^p$. On se propose d'étudier la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B \ .$$

On rappelle que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $L \in \mathbb{R}^p$ si et seulement si $\|X_n - L\|$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

(1) Montrer que pour tout entier naturel non-nul n,

$$X_n = A^n X_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right) B$$

avec la convention $A^0 = I_p$ la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

(2) Calculer $(I_p - A)X_n$. Trouver alors une expression simple de X_n en fonction de A, B, X_0 et n lorsque $I_p - A$ est inversible.

(3) On ne suppose plus que $I_p - A$ est inversible. Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $L \in \mathbb{R}^p$, alors B appartient à l'image de $I_p - A$.

(4) En fonction de A et B, quel est l'ensemble des valeurs possibles pour L ?

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme réel

$$Q_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \frac{X^j}{j!} \ .$$

On se propose de prouver de deux manières différentes que pour tout n, il existe un polynôme réel $P_n(X)$ tel que

$$(*) \qquad Q_n(X)Q_n(-X) = 1 + X^{n+1}P_n(X) \ .$$

(1) Calculer $Q_n(X)Q_n(-X)$ pour $n \in \{0, 1, 2\}$.

(2) Montrer qu'il existe deux polynômes $R_n(X)$ et $P_n(X)$ tels que

$$Q_n(X)Q_n(-X) = R_n(X) + X^{n+1}P_n(X)$$

et $R_n(X)$ est de degré au plus n.

(3) (a) Pour tout $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, calculer le coefficient de X^j dans $R_n(X)$.

(b) Montrer à l'aide de la formule du binôme que pour tout entier $\ell \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k C_\ell^k = 0 \ .$$

En déduire $(*)$.

(4) Prouver $(*)$ à l'aide d'un développement limité en 0 de $\exp(x)$.

Une action vaut initialement $X_0 = 1$ euro. À chaque instant $n \geqslant 1$, sa valeur est multipliée par une quantité aléatoire Z_n. On suppose que les variables Z_n sont indépendantes et de même lois, telles que : $\mathbb{P}(Z_n = 1 + a) = \mathbb{P}(Z_n = 1 - a) = 1/2$, avec $a \in]0, 1[$. On note X_n la valeur de l'action à l'instant n : ainsi, pour tout entier n strictement positif,

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} Z_k.$$

On pose $Y_k = \ln(Z_k)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien, et on définit pour tout entier naturel n la variable

$$\bar{Y}_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}.$$

(1) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{E}[X_n] = 1$.

(2) Exprimer $\mathbb{E}[\bar{Y}_n]$, puis $\mathrm{Var}[\bar{Y}_n]$ en fonction de a et n.

(3) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$P(Y_1 + \cdots + Y_n > -n\delta) \to 0$$

quand n tend vers l'infini.

(4) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(X_n > \varepsilon) \to 0$$

quand n tend vers l'infini.

(5) A-t-on $\mathrm{Var}[X_n] \to 0$ quand n tend vers l'infini ?

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soit $f : E^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que
- f est *bilinéaire* si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
  - $\forall x \in E, y \to f(x, y)$ est une application linéaire;
  - $\forall y \in E, x \to f(x, y)$ est une application linéaire.
- f est *alternée* si pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$x = y \implies f(x, y) = 0 .$$

(1) Dans cette question seulement, on prend $E = \mathbb{R}^n$ et on définit $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $g(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. La fonction g est-elle bilinéaire ? Est-elle alternée ?

(2) Montrer que si f est bilinéaire on a

$$\forall y \in E,\ f(0, y) = 0 .$$

(3) Montrer que si f est bilinéaire et alternée, alors $\forall (x, y) \in E^2$,

$$f(x, y) = -f(y, x) .$$

Réciproquement, montrer que si $g : E^2 \to \mathbb{R}$ est une application bilinéaire telle que

$$g(x, y) = -g(y, x) ,$$

alors g est alternée.

(4) Montrer que si f est bilinéaire et alternée et si $x, y \in E$ sont deux vecteurs liés, alors $f(x, y) = 0$.

(5) Dans cette question seulement, on prend $E = \mathbb{R}^2$, et on considère une base (e_1, e_2) de E. Soit $f : E^2 \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire alternée. Montrer que si $x = ae_1 + ce_2$ et si $y = be_1 + de_2$, alors

$$f(x, y) = (ad - bc) f(e_1, e_2) .$$

En déduire que l'ensemble des fonctions bilinéaires alternées sur E à valeur dans $\mathbb{R}$ est une droite vectorielle (un espace vectoriel de dimension 1).

Dans une classe, chacun des $m \in \mathbb{N}^*$ élèves doit réaliser un projet. Le professeur propose $n \in \mathbb{N}^*$ sujets de projets différents, qu'il numérote entre 1 et n. Il n'interdit pas que plusieurs élèves choisissent le même projet, mais il préfèrerait qu'un maximum de sujets différents soient traités. On suppose que les élèves choisissent leur projet indépendamment les uns des autres, et que le sujet numéro $i \in \{1, \dots, n\}$ est choisi par chacun avec probabilité p_i.

(1) Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $p_i = 1/n$, quelle est la probabilité que tous les élèves choisissent des sujets différents ?

(2) Calculer l'espérance $E(p_1, \dots, p_n)$ du nombre de sujets qu'aucun élève n'aura choisi.

(3) Pour quelle(s) valeur(s) de $(p_1, \dots, p_n)$ l'espérance $E(p_1, \dots, p_n)$ est-elle minimale ?

Soit f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles, avec g non-identiquement égale à zéro.

(1) Montrer qu'il existe un polynôme réel $P(X)$ de degré deux tel que

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}\,, \qquad \int_0^1 (\,f(t) - \lambda g(t)\,)^2\,dt = P(\lambda)\ .$$

(2) Calculer le discriminant de P, et en déduire que

$$(*) \qquad \int_0^1 (\,f(t)\,)^2\,dt \int_0^1 (\,g(t)\,)^2\,dt \geqslant \left(\int_0^1 f(t)g(t)dt\right)^2\ .$$

À quelle(s) condition(s) sur f et g y a-t-il égalité dans $(*)$?

(3) Montrer que

$$\sqrt{\int_0^1 |f(t)+g(t)|^2\,dt} \leqslant \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,dt} + \sqrt{\int_0^1 |g(t)|^2\,dt}\ .$$

Indication: Utiliser le fait que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y|^2 \leqslant |x|\,|x+y| + |y|\,|x+y|$.

Soit $n \geqslant 1$ un entier, $\mu > 0$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, \mu]$. On cherche à construire un intervalle de confiance pour μ, à l'aide de

$$M_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k \ ,$$

puis à l'aide de L_n une médiane de $\{ X_1, \ldots, X_n \}$.

(1) Pour tout $t \in [0, 1]$, calculer la probabilité de l'événement $\{ M_n \leqslant \mu t \}$.

(2) Soit $\alpha \in]0, 1[$. À l'aide de M_n, proposer un intervalle de confiance de probabilité de couverture $1 - \alpha$ pour μ.

(3) Pour tout $x \in [0, \mu]$, on définit

$$N(x) = \mathrm{Card}\, \{ 1 \leqslant k \leqslant n \text{ t.q. } X_k < x \} \ .$$

Quelle est la loi de $N(x)$?

(4) Pour tout $0 \leqslant y < \frac{\mu}{2} < x \leqslant \mu$, majorer les probabilités des événements $\{ x \leqslant L_n \}$ et $\{ L_n < y \}$.
Indication: on pourra faire apparaître $N(x)$ et $N(y)$, puis utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev: si Z admet une variance, alors

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \quad \mathbb{P}\,(|Z - \mathbb{E}\,[\, Z\,]| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(Z)}{\varepsilon^2} \ .$$

(5) En déduire un deuxième intervalle de confiance de probabilité de couverture au moins $1 - \alpha$ pour μ , de la forme $[\, L_n / a_n \, , \, L_n / b_n \,]$.

On considère une loterie qui propose un tirage quotidien avec des gains croissant linéairement : le jour numéro n, elle permet de gagner n euros. Un joueur tente sa chance chaque jour. On suppose qu'il a chaque jour une probabilité ε $(0 < \varepsilon < 1)$ de gagner, et on admet que les tirages sont indépendants. On note $X_0 = 0$, et soit X_n son plus gros gain après le tirage du jour n : ainsi, pour $n \geqslant 0$,

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} & \text{s'il perd la } n\text{-ème loterie;} \\ n & \text{s'il la gagne.} \end{cases}$$

(1) On note $u_n = \mathbb{E}[X_n]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie les relations suivantes : $u_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = (1-\varepsilon)u_{n-1} + \varepsilon n\ .$$

(2) Soit $v_n = u_n - n$. Quelle relation de récurrence est vérifiée par la suite $(v_n)_n$?

(3) Montrer que v_n converge et déterminer sa limite. En déduire les réels α et β tels que

$$u_n = \alpha n + \beta + o(1)$$

quand n tend vers l'infini.

(4) Que peut-on dire de la suite de terme général $\mathrm{Var}[X_n]$?

Une machine peut se trouver dans deux états : e_1 et e_2. On suppose que :

– si un jour elle se trouve dans l'état e_1, elle y persiste le lendemain avec probabilité $1-p$ et elle passe dans l'état e_2 avec probabilité p ;

– si un jour elle se trouve dans l'état e_2, elle y persiste le lendemain avec probabilité $1-q$ et elle passe dans l'état e_1 avec probabilité q.

On suppose que p et q appartiennent tous les deux à l'intervalle $]0,1[$. On note X_n l'état de la machine le jour numéro n; on note $v_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = e_1) \\ \mathbb{P}(X_n = e_2) \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que $v_n = M^n v_0$, où

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}.$$

(2) Trouver $P \in M_2(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \geqslant 0$ on pose $Y_n = (X_n, X_{n+1})$.

Soit $f_1 = (e_1, e_1), f_2 = (e_2, e_1), f_3 = (e_1, e_2), f_4 = (e_2, e_2)$, et soit $w_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_n = f_1) \\ \mathbb{P}(Y_n = f_2) \\ \mathbb{P}(Y_n = f_3) \\ \mathbb{P}(Y_n = f_4) \end{pmatrix}$.

(3) Montrer que $w_n = N^m \, w_0$, où

$$N = \begin{pmatrix} 1-p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & q \\ p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-q & 1-q \end{pmatrix}.$$

(4) On suppose que $p + q \neq 1$. Quelles sont les valeurs propres de N ?

(5) Même question si $p + q = 1$.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \qquad \text{si } x > 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0 \ .$$

(1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ lorsque c'est possible.

(2) Dresser le tableau de variations de f.

(3) Pour tout $y > 0$, on pose

$$g(y) = f\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y} \ .$$

Effectuer un développement limité à l'ordre 1 de $g(y)$ quand $y \to 0^+$.

(4) Tracer succinctement le graphe de f en tenant compte des réponses aux questions précédentes.

On cherche à estimer la probabilité $p \in]0,1[$ qu'un dé (potentiellement biaisé) tombe sur la face 6. Pour cela, on se fixe un entier r strictement positif, puis on lance le dé autant de fois que nécessaire jusqu'à avoir obtenu r fois le résultat 6; on note N_r le nombre (aléatoire) de lancers qui ont été nécessaires. On propose alors d'estimer p par $\hat{p}_r = r/N_r$. Pour tout l'exercice, on pourra utiliser l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \ ,$$

et on rappelle la définition du coefficient binomial : pour des entiers $a \geqslant b$,

$$C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!} \ .$$

(1) On considère dans cette question seulement le cas $r = 1$. Quelle est la loi de N_1 ? Calculer, puis représenter graphiquement le biais de l'estimateur $\hat{p}_1$ en fonction de p.

(2) Montrer que l'estimateur $\hat{p}_r$ est consistant, c'est-à-dire que $\hat{p}_r$ converge en probabilité vers p quand r tend vers l'infini. Que peut-on dire de son biais ?

(3) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à r,

$$\mathbb{P}\left(N_r = n\right) = C_{n-1}^{r-1} \ p^r \left(1-p\right)^{n-r} \ .$$

(4) Le généticien John Burdon Sanderson Haldane propose, pour $r \geqslant 2$, d'utiliser plutôt l'estimateur $\tilde{p}_r = (r-1)/(N_r - 1)$. Que penser de ce choix ? On pourra considérer d'abord le cas $r = 2$.

Un fabriquant cherche à optimiser le prix de vente p de son produit. Il suppose que chaque client potentiel ω est prêt à payer un prix aléatoire $X(\omega)$ pour acheter le produit. Si $X(\omega)$ est supérieur ou égal à p, la vente a lieu et le fabriquant gagne p euros; sinon, la vente n'a pas lieu et le fabriquant ne réalise aucun profit.

On suppose que X admet une densité de probabilité f continue sur $\mathbb{R}^+$ et une variance finie. On note F la fonction de répartition de X, définie pour tout réel p par $F(p) = \mathbb{P}(X \leqslant p)$. On note $Z_p(\omega)$ le profit réalisé par le fabriquant avec le client potentiel ω s'il fixe à la valeur p le prix de son produit, et on définit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(p) = \mathbb{E}[Z_p]$.

(1) Montrer que $g(p) = p(1 - F(p))$.

(2) Montrer que $g(p)$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini. En déduire que g admet au moins un maximum sur $\mathbb{R}^+$.

(3) En déduire une équation satisfaite par un prix p^* qui maximise la fonction g.

(4) S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, quel est le gain maximal que le fabriquant peut espérer par client potentiel ?

(5) Reprendre l'exercice avec la modification suivante : si la vente n'est pas réalisée, le fabriquant perd le montant p (au lieu de ne rien perdre ni gagner). On ne cherchera pas ici à calculer le gain maximal, mais on expliquera comment on pourrait l'obtenir grâce à une calculatrice.

Question bonus

Dans ce dernier cas, peut-il toujours choisir un prix lui assurant des bénéfices ?

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_t(x) = \ln\left(x^3 + x^2 + tx\right) \quad .$$

(1) Pour quelles valeurs de t la fonction f_t est-elle définie et continue sur $]0, +\infty[$?

(2) Pour quelles valeurs de t la fonction f_t réalise-t-elle une bijection de $]0, +\infty[$ vers un ensemble J_t à déterminer? On note g_t la bijection réciproque ainsi définie sur J_t.

(3) On suppose désormais que t est tel que les propriétés des questions (1) et (2) sont vérifiées. Déterminer un équivalent, de g_t aux bornes de J_t.
Indication: on pourra considérer la fonction $F_t : x \mapsto x^3 + x^2 + tx$, *définie sur un ensemble bien choisi, et sa réciproque* G_t.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit
$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x^2y^2 \ .$$

(1) Déterminer les 5 points critiques de f . En déduire les éventuels extrema locaux ou globaux de f .

(2) Déterminer (et tracer schématiquement) l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 1$.

(3) Déterminer (et tracer schématiquement) l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 0$.
Indication: on pourra étudier au préalable la fonction définie par
$$\phi(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \ .$$

(4) Maximiser $f(x, y)$ sous la contrainte $x + y = 1$.

Une tortue donne naissance à un nombre N de bébés : on note M le nombre de mâles et F le nombre de femelles. On suppose que N est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ (λ désignant un nombre réel strictement positif), et on suppose que chaque bébé a (indépendamment des autres) une chance sur deux d'être une femelle.

(1) Calculer la loi du couple (N, F).

(2) Calculer la loi de F, puis celle de M.

(3) Les variables M et F sont-elles indépendantes ?

On considère une usine de voitures ayant n ouvriers. Un ouvrier y produit une voiture en un jour. Chaque jour, l'usine emploie tous ses ouvriers, sauf si (au moins) l'un d'eux a son anniversaire — auquel cas la journée est chômée par tous. On considère que les dates anniversaires des ouvriers sont des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'année, et on ignorera pour simplifier l'existence d'années bissextiles. On note N le nombre de jours de l'année qui sont chômés par l'usine.

(1) Écrire, en fonction n et de N, le nombre de voitures produites par l'usine en un an.

(2) Calculer l'espérance de N.

(3) Pour quel nombre d'ouvriers n l'espérance du nombre de voitures produites est-elle maximale ?

Question bonus

Donner la valeur approchée à 1 près de $-\Big(\log(364/365)\Big)^{-1}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice $n \times n$ à coefficients réels. On note φ_A l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi_A(M) = AM - MA \ .$$

(1) (a) Montrer que φ_A est une application linéaire.

(b) On dit que M commute avec A si $AM = MA$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_A$ des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A est un espace vectoriel. Exprimer sa dimension en fonction du rang de φ_A.

(2) On suppose, dans cette question seulement, que $n = 2$, et qu'il existe des réels α et β tels que

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \ .$$

Écrire la matrice de φ_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de φ_A, ses valeurs propres, et les dimensions des sous-espaces propres associés, en fonction de α et β.

(3) On suppose que A est diagonale. Montrer que φ_A est diagonalisable, et déterminer une base simple de vecteurs propres et les valeurs propres associées. Quel est le rang de φ_A ?

(4) Qu'en est-il si l'on sait seulement que A est diagonalisable?
Indication: on pourra introduire l'isomorphisme $\psi_P : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}MP$ où P est une matrice inversible bien choisie, et considérer $\psi_P \circ \phi_A \circ (\psi_P)^{-1}$.

Question d'oral

Après la question (1): φ_A est-il un isomorphisme?

Alice joue au jeu suivant:
– elle choisit l'option 1 ou l'option 2;
– elle tire trois variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, X_3 uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$;
– si elle a choisi l'option 1, elle gagne le maximum M des trois valeurs tirées;
– si elle a choisi l'option 2, elle gagne la somme P des deux plus petites valeurs tirées.
Elle se demande quelle option est la plus avantageuse.

(1) Calculer la fonction de répartition, puis la loi de M.

(2) Calculer l'espérance de M.

(3) Quelle option lui conseillez-vous ?

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \ .$$

(1) Montrer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

(2) Pour tout $A, h > 0$, on définit

$$g_A(h) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant A/h} \frac{1}{1+(kh)^2} \ .$$

Montrer que $\lim_{h \to 0^+} hg_A(h)$ existe et la calculer en fonction de A .

(3) Soit $h > 0$. Montrer que $u_n(h) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{1+(kh)^2}$ converge quand $n \to +\infty$. On note $G(h)$ sa limite.

(4) Montrer que $hG(h)$ converge lorsque $h \to 0^+$, et déterminer sa limite.

Soit X une variable aléatoire Gaussienne de moyenne $\mu \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 = 1$.

(1) Calculer $\mathbb{E}\left[X^k\right]$ en fonction de μ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(2) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, $\mathbb{E}\left[X^k\right] = Q_k(\mu)$ où $Q_k(X)$ est un polynôme réel de degré égal à k et de coefficient dominant 1.

(3) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_k(X))_{k \geqslant 0}$ telle que pour tout entier $k \geqslant 0$,
$$\mathbb{E}\left[P_k(X)\right] = \mu^k \quad .$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^1 \left(x^3 + t^3\right)^{-1/3} dt \ .$$

(1) Déterminer le domaine de définition de f .

(2) Montrer que f est continue sur son domaine.
Indication: on pourra utiliser un changement de variable en posant $t = ux$.

(3) En quels points f est-elle dérivable, et quelle est sa dérivée?

On souhaite dépister, grâce à un contrôle sanguin, quels sont les bovins atteints par une certain virus dans un troupeau de n bêtes. On sait que chaque bête a, indépendamment des autres, une probabilité $p \in]0,1[$ d'être atteinte. Comme chaque test coûte cher, on procède de la manière suivante : on forme des groupes de m bêtes (on suppose que m divise n) ; dans chaque groupe, on mélange les prélèvements sanguins des bovins en un seul 'super-échantillon', dans lequel on teste la présence du virus (il suffit qu'une seule bête du groupe soit infectée pour que le test soit positif). Si on décèle la présence du virus dans un super-échantillon, on teste toutes les bêtes du groupe séparément.

(1) Quelle est la loi du nombre de bêtes atteintes dans le troupeau ? Rappeler (sans calcul) son espérance et sa variance

(2) Calculer l'espérance $E(m)$ du nombre de tests effectués

(3) Pour quelles valeurs de p vaut-il mieux choisir $m = n$ plutôt que $m = 1$?

Soit $k \geqslant 1$ un entier et $P \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients tous strictement positifs, telle que

$$(*) \qquad \forall j \in \{1, \dots, k\} \ , \quad \sum_{i=1}^{k} P_{i,j} = 1 \ .$$

(1) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la matrice P^n a des coefficients tous strictement positifs.

(2) Montrer que 1 est valeur propre de P, puis que pour tout entier $n \geqslant 1$, la matrice P^n vérifie la propriété $(*)$.

(3) On note $P^n_{i,j}$ le coefficient (i,j) de la matrice P^n.
On fixe un entier $i \in \{1, \dots, k\}$, et l'on considère les suites

$$u_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} P^n_{i,j} \qquad \text{et} \qquad v_n = \min_{1 \leqslant j \leqslant k} P^n_{i,j} \ .$$

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} \leqslant (1-\varepsilon)u_n + \varepsilon v_n \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon = \min_{i,j} P_{i,j} > 0 \ .$$

(4) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant (1 - 2\varepsilon)(u_n - v_n) \ .$$

Qu'en déduire pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis pour la suite de matrices $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$?

L'entreprise A fabrique des raquettes de tennis, qu'elle vend au prix unitaire x. De son côté, l'entreprise B fabrique des balles de tennis qu'elle vend au prix unitaire y. On suppose que la demande pour les raquettes est $D_A(x,y) = 3 - x^2$, alors que la demande des balles est $D_B(x,y) = 2 - x - y$. On néglige ici les coûts de fabrication.

(1) Trouver le prix des raquettes x qui maximise le profit $P_A(x,y) = xD_A(x,y)$ de l'entreprise 1.

(2) En admettant que l'entreprise 1 fixe ses prix comme déterminé dans la question (1), trouver le prix y des balles qui maximise le profit $P_B(x,y) = yD_B(x,y)$ de l'entreprise 2.

(3) Dans cette question, on suppose que les entreprises A et B fusionnent : le profit du groupe ainsi constitué sera donc la somme des profits des deux entreprises : $P(x,y) = P_A(x,y) + P_B(x,y)$. Comment le dirigeant du nouveau groupe doit-il fixer les prix x et y pour maximiser son profit $P(x,y)$?

(4) Discuter les différences entre les solutions des questions 1-2 et 3.

Question bonus
Est-ce qu'une telle fusion mènera toujours à une augmentation du profit global des entreprises ? Est-ce profitable aux clients ?

On rappelle le principe (simplifié dans cet exercice) du Loto. Un joueur choisit 5 entiers distincts $a_1, \ldots, a_5 \in \{1, \ldots, 49\}$. Indépendamment, on procède au tirage (sans remise) de 5 boules dans une urne en contenant initialement 49, numérotées de 1 à 49; on suppose que toutes les boules ont la probabilité d'être tirées. On note $X_1, \ldots, X_5$ les numéros des 5 boules tirées successivement. On dit que le joueur a gagné si $\{a_1, \ldots, a_5\} = \{X_1, \ldots, X_5\}$.

(1) Quelle est la probabilité de gagner au Loto?

Supposons que les règles du Loto sont modifiées comme suit. Le tirage des 5 boules se fait avec remise, et le joueur choisit des entiers $a_1, \ldots, a_5$ non-nécessairement distincts. On dit alors que le joueur a gagné s'il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, 5\}$ telle que $\left(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(5)}\right) = (X_1, \ldots, X_5)$. (Autrement dit, le joueur doit avoir trouvé les bons numéros avec multiplicité, mais pas forcément dans l'ordre.)

(2) Quelle est la probabilité de gagner à cette variante du Loto?

(3) Dans laquelle de ces deux versions du Loto a-t-on le plus de chances de gagner? Évaluer le rapport des deux probabilités.

Pour tout entier strictement positif n et pour tout nombre réel x strictement positif, on note

$$v_n(x) = \frac{1 - \exp(-nx)}{n(n+1)} \ .$$

(1) Montrer que la série de terme général $v_n(x)$ converge. Dans la suite de l'exercice, on note

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \ .$$

(2) En admettant que pour tout réel $y \in]-1, 1[$ on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = -\ln(1-y) \, ,$$

montrer que

$$f(x) = (1 - \exp(x)) \ln(1 - \exp(-x)) \ .$$

(3) Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \to f(x)$ définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et calculer ses limites en 0 et en $+\infty$. Tracer son graphe.