MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ÉCRIT

Sylvain Arlot, Aurélien Garivier

Coefficient : 3

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

Commentaires généraux

Le sujet était composé de deux exercices indépendants. Chaque exercice étant lui-même divisé en deux parties très largement indépendantes (seule la question II.14 utilisait un résultat provenant d'une autre partie, et c'était indiqué clairement au début de l'énoncé), le sujet était en fait composé de quatre blocs, le premier très court (I.(A)), et les trois suivants de tailles comparables. Comme chaque année, il proposait aux candidats des questions de difficultés variées et balayait une large part du programme.

Une attention particulière avait été portée à la progressivité du sujet lors de sa conception. Schématiquement, les questions peuvent être groupées en quatre niveaux de difficulté :

(1) questions de cours, calculs numériques élémentaires, ou combinaison des deux : I.1, I.2, I.4, II.1 et II.10. En les résolvant intégralement, on obtenait 9,5/20. En faisant la moitié de ces questions, on obtenait 6,5/20 (le barême n'est pas linéaire, les premiers points étant plus faciles à obtenir).

(2) questions d'application du cours classiques, ou demandant des calculs légèrement plus complexes ou abstraits : I.5, I.10b, II.2, II.4, II.7a (dérivabilité de g_k), II.11. En résolvant intégralement les questions de niveau 1–2, on obtenait 14,5/20. En faisant la moitié des questions de niveau 1–2, on obtenait 10/20.

(3) raisonnements courts mais non classiques, ou questions reposant sur la résolution correcte de questions les précédant : I.3, I.6, I.8, II.3, II.5–6, II.8–9, II.12–14. Ces questions sont logiquement les plus nombreuses, afin de permettre aux candidats de montrer leurs capacités de raisonnement dans les parties du programme qu'ils maîtrisent le mieux. En résolvant intégralement les questions de niveau 1–3, on obtenait 18,5/20. En faisant toutes les questions de niveau 1 et la moitié des questions de niveau 2–3, on obtenait 16/20.

(4) raisonnements plus fins et questions difficiles : I.7, I.9, I.10acd, I.11, II.7b, II.15.

Un grand nombre de copies abordaient avec succès de nombreuses questions, certaines impressionant même par la qualité et la quantité des réponses fournies. L'excellente préparation de ces candidats assure globalement aux écoles de la banque un recrutement de très bonne qualité. Mais comme les années précédentes, nous avons constaté que près de 30% des copies sont pratiquement vides. En effet, sur 580 copies [1], nous avons recensé 14 copies blanches, 27 copies sans un seul calcul ou raisonnement correct (où, par exemple, les candidats se sont bornés à recopier l'énoncé), et 123 copies auxquelles nous avons attribué une note entre 0,5 et 4,5/20. Précisons que pour obtenir 4,5/20, il suffisait par exemple

1. Ce nombre correspond aux candidats inscrits à l'une au moins des écoles de la banque Lettres et Sciences économiques et sociales et présents à l'épreuve de mathématiques.

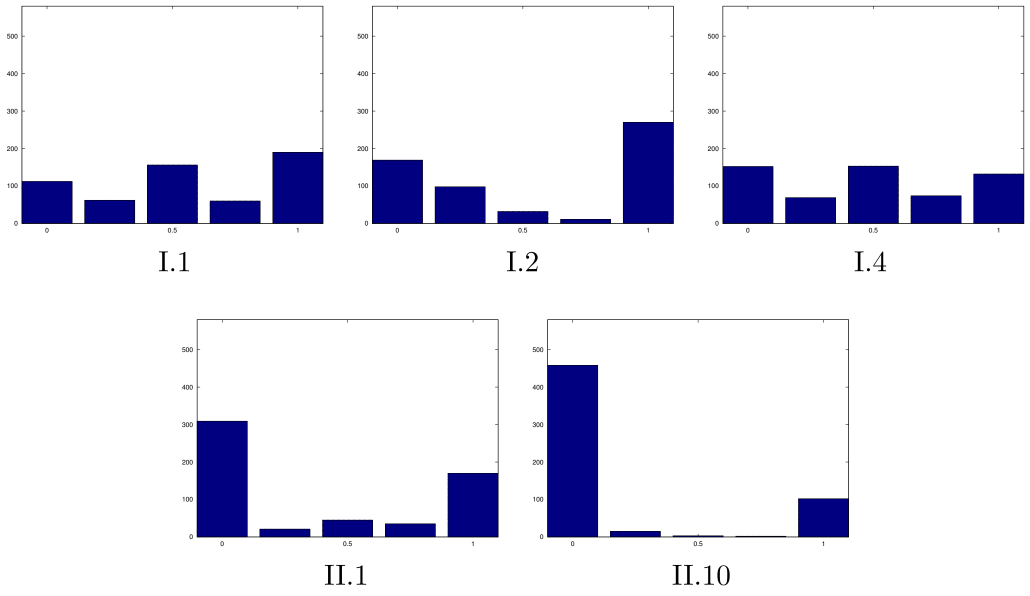

FIGURE 1. Histogramme des notes par question de “niveau 1”.

de résoudre correctement le système linéaire posé à la question I.1 à l’aide d’un pivot de Gauss.

Le plus inquiétant n’est pas la valeur numérique des notes attribuées à ces copies (la notation étant toujours relative dans un concours) mais le fait que très peu de compétences suffisent à dépasser ce niveau, notamment grâce aux cinq questions de niveau 1 proposées dans le sujet. Ainsi, la répartition des notes attribuées à chacune de ces cinq questions montre un taux de réussite assez décevant, toujours inférieur à 50% (voir la figure 1). Si l’on excepte la question II.10 (placée plus loin dans l’énoncé), c’est en général un petit tiers des candidats qui ont réellement su faire ces questions.

Il est difficile, à la seule vue des copies, de donner une explication à ce phénomène que nous constatons depuis plusieurs années. Il semble toutefois difficilement imaginable que le tiers des candidats les plus faibles ait sérieusement travaillé les mathématiques pendant leurs deux ou trois années de préparation. Ont-ils surtout profité de la remarquable formation offerte en classe préparatoire B/L dans les autres matières, sans se sentir obligés de travailler les mathématiques ? Nous pouvons en tout cas noter que parmi les 58 candidats admissibles à l’ÉNS Paris, deux seulement ont obtenu une note inférieure à 10/20 à l’écrit de mathématiques. Parmi les 195 sous-admissibles, trente-deux ont obtenu une note inférieure à 10/20 en mathématiques, dont seulement huit une note inférieure à 7/20. Les chances d’être admis dans l’une des écoles de la banque Lettres et Sciences économiques et sociales semblent donc statistiquement bien minces pour les candidats qui ne se donnent pas les moyens d’atteindre une note supérieure ou égale à 7/20 en mathématiques.

Rappelons pour finir que le barême n’est pas choisi afin de donner une mesure absolue du niveau des copies, et encore moins des candidats, en mathématiques. L’épreuve du concours vise uniquement à discriminer au mieux entre les copies en vue de l’admissibilité, puis l’admission, pour toutes les écoles de la banque. Par exemple, compte-tenu du nombre de places offertes aux candidats au sein de la banque, le nombre de candidats ayant obtenu 10/20 ou plus (223 sur 580) n’est ni alarmant ni significatif en lui-même. Il serait difficile de l’augmenter significativement sans pénaliser les tout meilleurs candidats, qui méritent de voir leurs efforts et leurs compétences récompensés.

L'inquiétude que le jury manifeste depuis plusieurs années vient du fait que le niveau requis pour obtenir une telle note (par exemple, résoudre la moitié des 11 questions de niveau 1–2, en quatre heures) ne nous semble pas si difficile à atteindre.

Les futurs candidats au concours pourront au moins en tirer la conclusion que, sauf amélioration subite et générale du niveau en mathématiques, il est très "rentable" de fournir un travail minimal en mathématiques afin (au moins) de résoudre et rédiger correctement toute question de cours ou calcul numérique élémentaire.

Avant de rentrer dans le détail des exercices, voici quelques conseils aux candidats pour la rédaction de leur copie :

- L'épreuve de mathématiques n'est pas un concours de vitesse. Il importe de traiter avec précision et de rédiger correctement les questions simples du début de chaque partie (I.1–2, I.4, II.1, II.10) pour ne pas y perdre bêtement des points, en particulier pour les candidats les moins à l'aise en mathématiques. Il est forcément plus délicat de récupérer ces points sur des questions un peu plus difficiles, où l'on demande notamment de s'être approprié les notations et résultats du sujet.
  Pour illustrer l'intérêt qu'ont les candidats à prendre le temps de bien rédiger et de vérifier leurs calculs, voici le détail des notes de quatre copies que nous avons corrigées :
  - 50% de I.1 + 25% de I.4 + II.2a (f_0 et f_1) donnent 4.5/20 au final à une copie ayant abordé une douzaine de questions, mais n'en réussissant (partiellement) que trois.
  - I.1 seule, mais parfaitement rédigée, obtient également la note de 4,5/20.
  - Tous les points sur I.1–2, 5, II.2a + 75% des points sur II.1 + 50% des points sur I.4 donnent une note finale de 9,5/20, pour 6 questions abordées.
  - Tous les points sur I.1–2, II.1,2a,10–11 + 75% des points sur I.4 donnent une note finale de 11,5/20, pour 7 questions abordées.
- Toute incohérence dans les résultats devrait amener les candidats à réfléchir, à vérifier leurs calculs, et au moins à écrire sur leur copie qu'ils ont repéré un problème. Parmi ceux qui le font, nous avons pu voir que la plupart obtiennent au final les points sur une question où leur première réponse ne leur en aurait rapporté aucun.
- Il est souhaitable de présenter sa copie le plus clairement possible. En particulier, le jury apprécie que les réponses à un même exercice soient présentées dans l'ordre, et qu'en tout cas les éléments de réponse à une même question soient rassemblés en un seul endroit, sauf mention explicite du contraire ! Comme chaque année, un candidat dont le niveau paraissait assez bon a perdu des points parce que le jury n'arrivait pas toujours à *lire* les mots et les formules qu'il écrivait.
- Recopier une question de l'énoncé ne peut jamais rapporter de point et demeure parfaitement inutile.
- Énoncer une affirmation manifestement fausse ne peut pas servir le candidat, mais seulement jeter la suspicion sur tout ce qu'il écrit.

Comme l'an dernier, en vue de préciser notre analyse des principales faiblesses observées dans les copies, nous indiquons pour chaque question le nombre de copies ayant obtenu au moins 75% des points, sur un total de 580 copies, dont 14 copies blanches.

Commentaires détaillés sur chaque exercice

Exercice I. Le premier exercice portait sur la résolution de systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss (partie (A)), puis par une méthode itérative (partie (B)). La méthode de la partie (B) revenait à minimiser la fonction $x \mapsto \|Ax - b\|^2$ dans $\mathbb{R}^n$ par descente de gradient, ce qu'il était bien évidemment inutile de savoir pour aborder cet exercice. La question 9 traitait ainsi du cas où le pas est fixe ($\delta_k = \delta$), et la question 10 du cas où l'on prend un pas variable δ_k décroissant vers zéro à une vitesse polynomiale.

Cet exercice a été le plus réussi par les candidats, en tout cas pour ses questions les plus faciles (plus nombreuses que dans l'exercice II) : 55% des points ont été obtenus dans cet exercice, alors que le barême total lui en attribuait environ 47%. Cette réussite n'est toutefois que modérée : seules quatre questions (I.1, I.2, I.4 et I.5) ont été réussies par plus de cent candidats. Sur ces quatre questions, la note moyenne et la note médiane sont légèrement inférieures à 50% de la note maximum ; seuls 120 candidats ont obtenu au moins 75% des points sur ces questions.

Un nombre important de copies a témoigné d'une grande confusion entre scalaires, vecteurs et matrices. Ainsi, aux questions I.3 et I.8, de nombreux candidats ont fait commuter vecteurs et matrices (y_k et M_k, notamment), les matrices entre elles (P et D à la question I.8), ou bien divisé par le vecteur $x_k - x^\star$ à la question I.3. À la question I.1, on a par exemple vu certains écrire

$$Ax = \begin{pmatrix} 5x & x & -x \\ 2x & 4x & -2x \\ x & -x & 3x \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pour finir par donner une solution à l'équation $Ax = b$ sous forme de vecteur.

Il nous a été signalé que le fait d'utiliser des notations minuscules pour les vecteurs a pu troubler certains candidats. Le choix de cette notation n'était ici nullement destiné à les déstabiliser, mais nous est apparu préférable ici pour des suites, qui se trouvaient être des suites de vecteurs. Ainsi, l'énoncé répétait à de nombreuses reprises le fait que x, b, x_k, z_k, etc. désignaient tous des vecteurs colonnes. On peut concevoir qu'un candidat croie dans un premier temps que x désigne un scalaire à la question I.1, mais poursuivre l'exercice sans jamais réaliser que x, x_k, y_k, z_k désignent tous des vecteurs (ou en ne le réalisant qu'une question sur deux) témoigne d'un grave manque de recul dans la manipulation des objets mathématiques.

1. [230 copies $\geqslant$ 75%] Il s'agissait d'une simple mise en œuvre de la méthode du pivot de Gauss : une question (parmi d'autres) qui, quand elle n'était pas réussie, laissait au correcteur un grand doute sur le profit tiré par le candidat de ses deux années de préparation en mathématiques. Nettement moins de la moitié des candidats obtiennent la plupart des points : au delà des erreurs de calcul, beaucoup ne l'abordent même pas, ou alors de façon complètement fantaisiste. Il est important de montrer les calculs intermédiaires dans une telle question, où la méthode de résolution est imposée. On ne peut donc pas avoir tous les points si l'on trouve la réponse par substitution, ou si l'on donne la solution sans une seule étape intermédiaire.

   La méthode naturelle était bien sûr de résoudre directement le système par un pivot, mais nous avons aussi admis les réponses (inutilement compliquées) passant d'abord par le calcul de l'inverse de A (avec un pivot de Gauss) suivi du calcul de $A^{-1}b$.
2. [275 copies $\geqslant$ 75%] Cette question était particulièrement élémentaire et ne faisait même pas vraiment appel à une notion de cours. Elle a logiquement été la plus réussie de l'ensemble du sujet, mais sans dépasser un taux de réussite de 50% des présents.
3. [90 copies $\geqslant$ 75%] Beaucoup de candidats ont sauté cette question, peut-être ne l'ont-ils pas vue. Il s'agissait uniquement de manipulations algébriques élémentaires, semblables à celles que l'on fait pour étudier une suite arithmético-géométrique, mais où il fallait faire attention en manipulant vecteurs et matrices. On a ainsi vu plus d'un candidat proposer la solution

$$M_k = 1 - \frac{\delta_k \, {}^tA(Ax_k - b) - x^\star}{x_k - x^\star} \quad .$$

4. [189 copies $\geqslant 75\%$] Beaucoup de candidats ont ici mélangé les critères d'inversibilité et de diagonalisabilité, voire invoqué des critères plus ou moins fantaisistes ("une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non-nuls est diagonalisable", "une matrice triangulaire est inversible", "une matrice inversible n'est pas diagonalisable"). D'autres ont cru que A_3 était diagonale (donc diagonalisable), ou directement calculé "$ad - bc$" sans jamais préciser le sens de la notation qu'ils introduisaient, ce qui est indispensable pour une notation habituelle mais ni universelle ni utilisée dans l'énoncé.

   Pour justifier de l'inversibilité, on ne peut se contenter d'affirmer "A_3 est de rang 2 donc inversible", la valeur du rang n'étant pas une évidence totale (du moins, à la vue d'autres copies) ; des justifications possibles étaient "A_3 est triangulaire sans zéro sur la diagonale", "A_3 est échelonnée", ou encore "les colonnes de A_3 sont libres car non proportionnelles". La non diagonalisabilité de A_3 a finalement été mieux rédigée que l'inversibilité, ce qui peut sembler étonnant a priori.
5. [220 copies $\geqslant 75\%$] L'erreur la plus courante a conduit à trouver 1 et 2 comme valeurs propres de C, de diverses manières. L'énoncé indiquait clairement que 1 n'était pas valeur propre : cela aurait pu inciter les candidats à vérifier leurs calculs ou raisonnements. Obtenir les bonnes valeurs pour λ et μ n'était d'ailleurs pas suffisant pour répondre intégralement à la question : il fallait aussi justifier l'encadrement. Un candidat a ainsi écrit sans scrupules que $0 < 1 - \sqrt{2}$, plutôt que de vérifier ses calculs devant une telle incohérence.
6. [44 copies $\geqslant 75\%$] Il s'agissait ici de déterminer les vecteurs propres de C_3, puis de prendre l'initiative de les renormaliser pour que la condition $u^2 + v^2 = 1$ soit vérifiée. Cette opération n'est pas classique en B/L (il n'est pas souhaitable que toutes les questions du sujet le soient), et son taux de réussite est assez satisfaisant.
7. [10 copies $\geqslant 75\%$] Bien que préparée par la précédente, cette question nécessitait un certain recul, car il fallait réaliser que ${}^tP = P^{-1}$, et donc que ${}^tP$ est la matrice de changement de base rendant C_3 diagonale. Notons ici que la formule de changement de base est volontairement écrite à l'envers par rapport à d'habitude, afin de simplifier les formules dans la fin de l'exercice (sinon, on aurait dû écrire $z_k = {}^tPy_k$, et ainsi de suite). Les candidats qui ont réussi la question sont ceux qui ont réalisé que la question précédente était une indication pour construire P, et qui étaient capables de plus qu'une application directe de leur cours.
8. [39 copies $\geqslant 75\%$] Outre les erreurs déjà signalées, beaucoup de candidats utilisent le résultat de la question 3 sans vérifier l'hypothèse faite alors pour A_3 (ce que l'inversibilité de A_3, obtenue à la question 4, permettait de justifier).
9. [9 copies $\geqslant 75\%$] Il est faux d'écrire directement que $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, mais l'idée était bien de remarquer c'est le cas pour chaque coordonnée de z_k . Ensuite, le traitement exhaustif des cas particuliers rend la question longue à rédiger proprement, car une suite géométrique ne converge pas si et seulement si la valeur absolue de sa raison est inférieur ou égale à 1 : la suite constante égale à zéro converge également. Bien évidemment, le barème a tenu compte du temps demandé pour rédiger parfaitement la réponse, et l'on obtenait une bonne partie des points sans traiter intégralement ces cas particuliers. Enfin, pour obtenir la valeur de la limite de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, il fallait invoquer l'inversibilité de P (conséquence de la question 7), et non le fait que "P n'a aucun coefficient nul".

10.a [1 copie $\geqslant 75\%$] Nous avons été surpris par le nombre de mauvaises réponses à cette question. Ce n'était pas la plus facile, mais une bonne centaine de candidats ont cru trouver la réponse, alors que seuls quatorze y ont obtenu des points en esquissant l'idée qu'une suite monotone et bornée converge, et aucun n'a obtenu la note maximale. Les erreurs les plus courantes étaient de dire que "$z_{k+1} - z_k \to 0$ donc z_k

converge" (voire "converge à partir d'un certain rang"), d'essayer d'appliquer I.9 car $0 < 1/(3k^\alpha) < 2/\mu$ à partir d'un certain rang, ou de faire comme si la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ était réelle et décrire $|I_2 - \delta_k D| < 1$.

10.b [53 copies $\geqslant$ 75%] Une question standard sur les séries se cachait ici et a eu plus de succès que la question précédente. Elle a toutefois montré qu'un certain nombre de candidats, assez courageux pour tenter une question aussi lointaine dans l'exercice, confondent toute de même la convergence d'une série avec la convergence de son terme général vers zéro.

10.c [3 copies $\geqslant$ 75%] Il était difficile de traiter directement la convergence de $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, d'autant plus qu'on ne pouvait pas écrire $\ln(s_0)$ (voire $\ln(z_0)$) comme si s_0 était toujours un réel strictement positif.

10.d [aucune copie $\geqslant$ 75%]

11. [aucune copie $\geqslant$ 75%]

Exercice II. Le deuxième exercice portait sur la loi de Benford, parfois appelée loi des nombres anormaux, qui régit sous certaines conditions la loi des chiffres les plus significatifs dans une série de nombres, et dont un argument plaidant pour son universalité était esquissé ici. Sous ce prétexte un peu original se cachaient en fait des calculs et des raisonnements d'analyse et de probabilités le plus souvent classiques et élémentaires. Le début de la partie A (questions 2–4) était avant tout un exercice d'analyse. La suite de l'exercice faisait intervenir quelques notations nouvelles mais très simples (partie fractionnaire, mantisse, logarithme en base 10, loi de Benford) dont était testée la capacité d'appropriation. Il nous a été signalé que figurait un peu maladroitement dans l'énoncé la mention que f était "intégrable sur $\mathbb{R}$" (il fallait comprendre ici que son intégrale était convergente en $\pm\infty$), ainsi que la notation $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ au lieu de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ - nous le regrettons bien sûr, et peut-être une poignée de candidats ont-ils été gênés pour une ou deux questions ; ces points ont toutefois semblé d'importance assez marginale à la correction des copies.

1. [190 copies $\geqslant$ 75%] Cette question de cours ne demandait aucun calcul et donne une (nouvelle) mesure fiable de la connaissance du cours sur un point très classique du programme : seul un petit tiers des candidats a donné une réponse correcte ou presque. Hormis des réponses fantaisistes (1, $1/t$, etc.), de nombreux candidats se sont étrangement arrêtés à "$\int_0^x f(t)dt$ avec $f(t) = 1$ sur $[0, 1]$", sans dire pour quelles valeurs de x cela est vrai ni daigner calculer l'intégrale.
2. [170 copies $\geqslant$ 75%] Les fonctions f_n étaient définies uniquement sur $]0, +\infty[$, l'énoncé omettant de les prolonger explicitement (par la valeur 0) sur le reste de l'ensemble $\mathbb{R}$ pour les considérer comme des densités de probabilité : la plupart des candidats ont semblé familiers avec cet usage. Il s'agissait donc seulement de faire le calcul, très classique, de $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$, dont la réponse était implicitement donnée par l'énoncé. Cette question a probablement fait perdre beaucoup de temps à de nombreux candidats qui se sont cru obligés de détailler à l'excès calculs et justifications (jusqu'à 5 pages et demie pour cette seule question), alors que l'essentiel était de justifier la convergence des intégrales puis d'expliquer une intégration par parties. Le raisonnement étant pratiquement le même pour f_1 et pour f_n avec $n \geqslant 2$ quelconque, il était même inutile de recopier deux fois le détail des justifications.

Nous avions remarqué les années précédentes que de nombreux candidats n'arrivent pas à faire un raisonnement simple avec une fonction f_n mais étaient capables de faire le même raisonnement lorsque $n = 0$ ou $n = 1$. Nous avons donc formulé cette question de manière à distinguer ces candidats à la fois des plus faibles et de ceux qui sont capables d'un niveau d'abstraction légèrement supérieur. Ici, traiter le cas de f_n ou celui de f_1 demandait exactement les mêmes compétences (savoir faire une intégration par parties classique sur un intervalle non-compact), mis à part le niveau d'abstraction. Le résultat est que 275 candidats ont su faire les cas $n = 0, 1$ (c'est-à-dire, obtenu 75%

des points), mais seuls 170 ont su traiter le cas général. Nous insistons sur le fait que cette compétence d'abstraction est fondamentale pour l'épreuve de mathématiques du concours B/L. Elle fait partie des quelques compétences clé distinguant une copie faible (note inférieure ou égale à 6) d'une copie au moins moyenne (note supérieure ou égale à 10).

3. [34 copies $\geqslant 75\%$] Cette question d'analyse un peu abstraite a mis en difficulté la plupart des candidats. Beaucoup ont cru ici que la question portait sur les fonctions f_n, alors qu'on leur demandait un raisonnement valable pour toute fonction f vérifiant une certaine condition. La formulation de la question ("S'il existe un réel a tel que f soit ...") aurait dû les amener à mettre en doute leur mauvaise lecture du sujet. Justifier l'indication a également posé divers problèmes, certains pensant que f admet forcément une limite en $+\infty$ (et écrivant que "$\lim_{+\infty} f \neq 0$" est la négation de "f tend vers zéro"), ou bien que $|f|$ est la primitive de $|f'|$.
4. [33 copies $\geqslant 75\%$] Comme la question précédente, les candidats ont peiné à prouver un résultat qui a bien rappelé le théorème des accroissements finis à certains, mais la présence du facteur $1/2$ a troublé la plupart. Hormis les candidats inventant un théorème sur mesure (ou invoquant "Taylor-Lagrange à l'ordre 2"), le raisonnement faux le plus courant était d'appliquer le théorème de Rolle puis la question 3. Malheureusement, cette démonstration assez astucieuse ne fonctionnait pas car les hypothèses de la question 3 n'avaient aucune raison d'être vérifiées par la fonction g.
5. [72 copies $\geqslant 75\%$] Cette question permettait de tester les compétences des candidats à s'approprier des notions intuitives (partie entière, partie fractionnaire), mais qu'ils n'ont pas l'habitude de manipuler. Elle ne supposait bien entendu aucune connaissance sur les familles sommables : seule devait être comprise la notation $\sum_{k\in\mathbb{Z}}$, qui ne prête guère à ambigüïté. Cette question a surtout révélé des difficultés à formuler un raisonnement purement logique, beaucoup mélangeant "pour tout $k \in \mathbb{Z}$", "il existe $k \in \mathbb{Z}$" et "il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$". D'autres ont confondu événements "indépendants" et "incompatibles". Une dizaine de candidats ont ici utilisé la notation $\uplus$, qui n'est pas universelle (il fallait donc la définir dans la copie) ; le point central n'étant pas toujours très visible, il vaut peut-être mieux écrire en toutes lettres "et cette union est disjointe".
6. [135 copies $\geqslant 75\%$] De nombreux candidats ont rédigé cette question en partant de l'expression de gauche (la plus simple) pour essayer de la transformer en l'expression de droite. La démarche inverse était pourtant bien plus aisée, comme très souvent pour ce type de question.
7. [aucune copie $\geqslant 75\%$] Une cinquantaine de candidats seulement a su justifier correctement la dérivabilité de g_k et calculer g_k', ce qui n'était pourtant pas une question bien difficile. L'erreur la plus courante était d'invoquer la dérivabilité de f, qui n'était pas supposée dans l'énoncé, puis d'écrire que la dérivée de $t \mapsto \int_k^{k+t} f(x)dx$ est $t \mapsto \int_k^{k+t} f'(x)dx$. La majoration, bien plus délicate, demandait a minima d'être un peu à l'aise avec la manipulation des valeurs absolues dans/hors de l'intégrale, ce qui n'était manifestement pas le cas des candidats.
8. [60 copies $\geqslant 75\%$] Cette question combinait plusieurs résultats obtenus précédemment dans la partie (A) de l'exercice, et a été faite correctement par des candidats ayant en général admis ces résultats. Ils ont ainsi pu montrer leur compréhension globale de cette partie de l'exercice. Les deux principales difficultés étaient de bien appliquer la question 4 à chaque fonction g_k séparément (aucun résultat du programme ne permettant de justifier simplement la dérivabilité de $t \mapsto \sum_k g_k(t)$), puis de bien justifier que g_k vérifie toutes les hypothèses de I.4.
9. [9 copies $\geqslant 75\%$] Il s'agissait ici de combiner les questions 3 et 8 et d'utiliser l'équivalent de Stirling (que plusieurs candidats ont tenté d'appliquer plus tôt dans

l'exercice), ce qui a visiblement semblé plus difficile que la question précédente aux candidats qui l'ont tenté.

10. [104 copies $\geqslant$ 75%] Cette question faisait manipuler aux candidats la partie entière (à nouveau) et la loi de Benford. La plupart des candidats qui l'ont tentée l'ont bien faite, mais ils ont finalement été assez peu nombreux (moins de 130). Il nous a été signalé que le fait de définir la fonction de répartition de la loi de Benford sur l'intervalle $[1, 10[$ uniquement a pu bloquer des candidats. Nous n'avions pas ici l'intention de piéger quiconque, le jury sera à l'avenir toujours très vigilant pour ne pas déstabiliser quiconque inutilement ; mais il ne nous semble pas insurmontable pour les candidats de réaliser seuls que, comme $\log_{10}(1) = 0$ et $\log_{10}(10) = 1$, cette petite liberté (bien classiquement) prise par l'énoncé pour simplifier la suite n'est source d'aucune ambiguïté.
11. [65 copies $\geqslant$ 75%] Les manipulations du logarithme et de l'exponentielle ont souvent laissé à désirer, de nombreux candidats s'avérant incapables de simplifier $\log_{10}(10^x)$, voire même écrivant des horreurs telles que "$e^{x \ln 10} = e^x + 10$".
12. [3 copies $\geqslant$ 75%] Cette question demandant à la fois de s'approprier la notion de mantisse et un raisonnement fin, elle a été très peu réussie. La plupart des candidats tentant une réponse ont proposé une loi au hasard. De nombreuses réponses, comme par exemple "une loi uniforme sur $[10^{-k}, 1]$", étaient totalement incohérentes avec le fait que $M(x) \in [1, 10[$ pour tout réel x strictement positif. Nous renouvelons ici notre conseil aux candidats de procéder à une vérification de cohérence de leurs résultats, réflexe beaucoup trop rare ici.
13. [2 copies $\geqslant$ 75%] Peu de candidats on tenté cette question, la plupart écrivant que $\{ M(X) \leqslant x \} = \left\{ X \leqslant 10^K x \right\}$ sans jamais dire que $K = \lfloor \log_{10}(X) \rfloor$ n'est pas n'importe quel entier. Il fallait ici procéder avec rigueur.
14. [17 copies $\geqslant$ 75%] Comme la question 8, il s'agissait ici de combiner plusieurs résultats donnés dans l'énoncé, ce qu'on su faire des candidats qui avaient en général dû admettre ces résultats pour cela. Précisons qu'un tel comportement est tout-à-fait admissible (savoir combiner plusieurs résultats obtenus précédemment est l'une des compétences attendues à l'épreuve de mathématiques), mais que le barême ne le valorise pas à l'excès afin de ne pas défavoriser les candidats qui traitent le sujet dans l'ordre en passant du temps à chercher chacune des questions de l'énoncé.
15. [aucune copie $\geqslant$ 75%] Très peu de candidats ont tenté cette question, qui (sans être insurmontable) nécessitait probablement un peu plus de temps de réflexion.