MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ORAL

Sylvain Arlot, Aurélien Garivier

Coefficient : 2

Durée de préparation : 1 heure

Durée de passage devant le jury : 30 minutes

Sujet : 2 exercices (que le candidat doit traiter tous les deux, et exposer dans l'ordre qu'il souhaite)

Préparation : L'usage de la calculatrice ou de tout autre document est interdit

1. Commentaires généraux

L'impression générale du jury est légèrement moins bonne que l'année passée, probablement du fait d'une moindre sélection à l'écrit. En témoigne la moyenne, qui est de 10 cette année contre 10,9 en 2011 (avec des critères de notation identiques). Il n'en demeure pas moins que les meilleurs candidats ont réalisé d'excellentes prestations ; ils ont simplement été moins nombreux. À l'inverse, parmi les candidats les moins à l'aise en mathématiques, très peu ne connaissaient vraiment pas leur cours, ce qui est plutôt satisfaisant. Nous avons ainsi plus rarement mis une note strictement inférieure à 4/20 (1 candidat cette année, contre 4 en 2011). La conséquence de ces deux phénomènes est la diminution de l'écart-type (3,97 contre 4,39 en 2011). Nous veillerons à ne pas descendre beaucoup plus bas à l'avenir, afin de maintenir l'équilibre entre les matières présentes à l'oral.

Comme à l'habitude, chaque planche est constituée de deux exercices totalement indépendants. Chaque couplage est construit dans un triple objectif d'équilibre : couverture thématique (analyse, algèbre, probabilités / statistiques), difficulté (deux exercices moyens, ou bien un exercice facile ou court avec un plus difficile ou long), et originalité. Le jury en effet a choisi cette année de proposer plus d'exercices assez classiques, en couplant fréquemment un exercice proche de ce que les élèves ont pu traiter pendant leur préparation avec un autre plus original. Sont ainsi testées à la fois l'aptitude à reproduire des raisonnements déjà vus dans un cadre similaire, et la capacité d'adapter ses connaissances à un contexte nouveau.

Toutes les planches (un peu plus nombreuses que nécessaire en fait) sont prêtes avant le début des épreuves : elles couvrent toutes les notions au programme, leur numéro n'a aucune signification, et leur ordre d'arrivée au cours des oraux est le fruit purement aléatoire du tirage des premiers candidats de chaque série.

Quelle que soit la difficulté des exercices (qui est évidemment prise en compte dans la notation), nous insistons une nouvelle fois sur l'importance de la reprise : même sans avoir fait grand chose pendant sa préparation, un candidat peut obtenir une très bonne note s'il réagit bien aux indications du jury ; nous regrettons beaucoup de voir quelques candidats s'effondrer peu à peu, et ne pas montrer leur juste valeur.

De manière très générale, les candidats sont particulièrement mal à l'aise et maladroits avec les tracés (graphe d'une fonction simple comme $x \mapsto (1+x^2)^{-1}$, racines de l'unité dans le plan complexe, etc.). Ces tracés sont pourtant en général très utiles pour avoir une intuition des raisonnements demandés. Au lieu de constituer une aide aux candidats, ils ont surtout révélé un manque de compréhension du problème posé. L'an prochain, nous poserons aussi souvent que possible ce type de question au cours de l'oral.

Dans plusieurs exercices, il était utile de savoir encadrer entre deux entiers consécutifs les nombres e, π et $\ln(2)$. Assez étrangement, peu de candidats ont su le faire.

Enfin, au sujet des suites définies par une récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, certains candidats se souviennent plus ou moins que l'on peut étudier la monotonie de la suite grâce à celle de f ; attention toutefois à ne pas utiliser de travers une règle dont on peut par ailleurs tout aussi bien se passer.

2. Déroulement de l'oral

Dans l'ensemble, le déroulement de l'oral (présentation synthétique des résultats obtenus lors de la préparation, en 10 minutes maximum, puis reprise avec le jury) est très satisfaisant, et donne l'opportunité à tout candidat de bien montrer tout ce qu'il sait faire dans les deux exercices proposés. Certains candidats pourraient toutefois améliorer leur prestation en faisant attention aux points suivants :

– Peu de candidats annoncent ce qu'ils ont fait au début de leur présentation, certains se lancent immédiatement dans le détail de calculs techniques qu'il vaudrait mieux éviter à ce stade, manquant complètement l'objectif de donner une vision synthétique de leur préparation.
– Chaque candidat a intérêt à se montrer *synthétique* lors de l'exposé initial de sa préparation, quitte à ne pas utiliser l'intégralité des dix minutes qui lui sont accordées : plus longue est la reprise, plus le nombre de question finalement traitées a des chances d'être élevé. Un exposé très court n'est jamais pénalisé en soi.
– Nous encourageons les candidats à se méfier de l'impression qu'ils ont de leur prestation, qui ne reflète pas forcément fidèlement leur note. Ainsi, quelle que soit sa préparation, un candidat ne doit jamais se démobiliser en croyant par erreur avoir raté son oral, alors que les attentes du jury ne sont pas exactement les mêmes sur tous les exercices. Par exemple, pour certains exercices où la première question contient plusieurs sous-questions, la traiter parfaitement et en intégralité est déjà suffisant pour obtenir une bonne note.

3. Conseils aux candidats

Une nouvelle fois, nous déconseillons fermement à un candidat de tenter de faire croire au jury qu'il a compris et qu'il sait résoudre certaines questions quand cela n'est pas le cas : le jury se rend immanquablement compte de ce genre de bluff, et toutes les affirmations du candidat en deviennent suspectes.

Nous encourageons les candidats à se méfier des "demi-souvenirs", qui peuvent amener à dire des énormités.

Quand les candidats choisissent d'introduire une notation supplémentaire non donnée dans l'énoncé, nous attirons leur attention sur le fait que ce choix doit être judicieux, et ne pas prêter à confusion. Par exemple, éviter la notation P lorsque p est déjà utilisé, les deux sont indiscernables au tableau (et souvent aussi à l'oral !).

4. Commentaires sur les planches

Planche 1: Concernant le premier exercice, si la limite de $x^\alpha \ln(x)$ quand x tend vers 0 semble bien connue, la présence du terme $\cos(1/x)$ pose de nombreux problèmes aux candidats. La question 3, ne nécessitant pourtant pas beaucoup plus d'éléments que la 2, est moins bien comprise.
Le deuxième exercice débutait par une question assez calculatoire, plutôt bien réussie. Beaucoup de pistes peuvent être suivies pour résoudre la deuxième question : un candidat a par exemple remarqué que B^n peut s'écrire comme combinaison linéaire de l'identité et d'une involution, avec des coefficients qui tendent vers 0.

Planche 2: Seul un candidat a su répondre correctement à la première question de l'exercice 1, en prenant l'exemple d'une suite $(p_n)_n$ constante : il savait trouver un équivalent des sommes partielles de la série harmonique. La question 2 est classique mais n'a pas été abordée.
Pour le deuxième exercice, les candidats ont de bons réflexes pour calculer la loi du minimum et de maximum. Par contre, trois des quatre candidats semblaient croire que si une suite $(u_n)_n$ tend vers 1 par valeurs inférieures, la suite de terme général u_n^n converge toujours vers 0 (ou vers 1, selon les candidats). Dans la question 3, il était opportun de simplifier $\exp(-x-\ln(n))$ en $\exp(-x)/n$. Les notions d'estimateurs sans biais (voire consistant/convergent) semblent par contre bien connues. La question 5, un peu plus difficile, n'a été abordée qu'avec le meilleur candidat.

Planche 3: Les candidats ont eu pour la plupart de grosses difficultés à s'approprier la modélisation du premier exercice. Par contre, ils connaissaient tous bien la loi géométrique et ses propriétés.
L'exercice 2 nécessitait peu de connaissances, mais une certaine initiative dans le choix des majorations et dans les raisonnements.

Planche 4: Le premier exercice testait à la fois des compétences en analyse et en probabilités. La primitive de $(1+x)^{-1}$ est bien connue, par contre (comme chaque année, et comme à l'écrit) le tracé d'un

graphe (aussi élémentaire soit-il) pose toujours problème à de nombreux candidats. En particulier, tracer une densité prenant des valeurs négatives, ou une fonction de répartition non croissante, laisse une très mauvaise impression.
Dans le deuxième exercice, la question 2 a été bien réussie ; par contre, la première question a mis en lumière de grosses erreurs de raisonnement logique ou de calcul, tandis que la troisième nécessitait un peu plus d'initiative. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z = z^2$ est loin d'aller de soi.

Planche 5: La première question du premier exercice nécessitait de distinguer trois cas suivant la valeur de a : les candidats ont semblé perdus devant une telle complexité. Ils connaissaient par contre plutôt bien leur cours sur les suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = g(u_n)$. Sur quatre candidats, un seul situait e entre 2 et 3.
La deuxième question de l'exercice 2 était visiblement connue de tous les candidats. Par contre, le raisonnement de combinatoire qui permettait de résoudre la première question a posé plus de difficultés (un candidat l'a toutefois parfaitement traitée). Les candidats n'ont pas eu le temps de traiter intégralement la question 4, mais ils pouvaient avoir l'intuition que l'espérance recherchée était inférieure à celle trouvée précédemment, et qu'elle avait la même limite quand n tend vers l'infini.

Planche 6: Dans le premier exercice, le jury a été surpris de constater que les relations coefficients/racines sont complètement méconnues de nombreux candidats, même pour les polynômes de degré 2. On pouvait toutefois les retrouver aisément en résolvant soigneusement un système non linéaire.
La première question du deuxième exercice était extrêmement classique, et a d'ailleurs été bien réussie. La troisième question a révélé que plusieurs candidats ne maîtrisent pas vraiment les liens entre équivalents et la notation $o(\cdot)$.

Planche 8: Pour démontrer le joli résultat de l'exercice 1, seules un peu de logique et des connaissances minimales sur la convergence des séries étaient nécessaires. Cette planche a ainsi pu mettre en valeur les candidats qui arrivaient à s'approprier correctement les objets qui leur étaient définis dans l'énoncé.
Le deuxième exercice testait surtout la bonne connaissance du cours de probabilité.

Planche 9: La première question du premier exercice est très simple, mais nécessite quand même un effort de clarté et de précision dans sa résolution au tableau. Deux candidats ont bien entamé la seconde, mais ont bloqué au moment où l'on a besoin de voir que f est impaire : à cause de cela, ils ne nous ont pas présenté leur raisonnement lors de l'exposé initial, ce qui était un peu dommage. La troisième question nécessitait un certain recul.
Dans le deuxième exercice, la première question est une application directe du théorème de la bijection monotone (continue), que

les candidats confondent souvent avec le théorème des valeurs intermédiaires. L'exercice n'était pas très difficile ; il fallait tout de même penser à justifier les inégalités strictes qui étaient demandées. Dans la question 3, les calculs de l'espérance et de la médiane de la loi exponentielle sont classiques et bien réussis (encore faut-il savoir que $\ln(2) < 1$ pour pouvoir les classer). Par contre, on ne peut calculer directement la médiale : avec un raisonnement semblable à celui de la deuxième question, on peut voir qu'elle est supérieure à l'espérance.

Planche 10: Le premier exercice traitait très classiquement d'une petite chaîne de Markov. Il a été l'occasion de revenir sur la diagonalisation, et sur les limites des suites géométriques.
Certains candidats ont été gênés, dans la première question du deuxième exercice, par la présence de paramètres dans la fonction G. Mais même le tracé d'une parabole aux coefficients numériques n'allait pas de soi, ni d'ailleurs la convergence demandée à la question 2.

Planche 11: Le premier exercice est une variation autour de la règle de Descartes. Il met en jeu à la fois des notions d'algèbre linéaire et des raisonnements d'analyse. Certains candidats ont remarqué que les éléments de F sont les vecteurs propres de l'opérateur de dérivation, mais il fallait préciser le bon espace vectoriel de référence pour pouvoir conclure. Un candidat a presque fini l'exercice seul.
Le deuxième exercice permettait de tester des connaissances élémentaires du programme en probabilités : linéarité de l'espérance, loi des grands nombres, théorème de la limite centrée, que plusieurs candidats ont peiné à énoncer (ils ne savaient pas donner des hypothèses suffisantes). À la question 1, plusieurs ont cru reconnaître une suite arithmético-géométique dans $(u_n)_n$, mais sans voir que $\mathbb{E}[u_n]$ est le terme général d'une suite géométrique. De manière générale, le traitement de cet exercice était assez décevant.

Planche 12: Le premier exercice, assez classique, semblait avoir déjà été (au moins en partie) rencontré par certains candidats, sans pour autant qu'ils soient forcément capables de le refaire. Si le début de la question 1 et la question 3 n'ont posé de problème à personne, il n'en a pas été de même avec l'application du théorème des valeurs intermédiaires, pas toujours bien connu et parfois confondu avec le théorème de la bijection monotone.
Quant au deuxième exercice, il faisait un peu penser à un exercice posé l'année précédente ; même la première question n'a toutefois pas été toujours réussie. Un candidat a fait preuve d'excellents réflexes et d'une bonne compréhension des notions statistiques en jeu ; par exemple, il a utilisé spontanément la formule $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x)dx$. Si la plupart des candidats savent comment aborder les questions 1, 2 et 4, leur résolution complète sans erreur de calcul est plus difficile ; ceux qui trouvaient pour l'espérance et la variance des quantités négatives auraient pu se douter de leur erreur. La question 3 permettait de tester la compréhension de la notion d'estimateur :

beaucoup de candidats proposaient une quantité faisant intervenir l'espérance de Z_1.

Planche 13: Dans le premier exercice, les candidats ont le plus grand mal à exprimer les coefficients d'un polynôme en utilisant ses dérivées successives en 0. Cela a pourtant été au centre d'un problème d'écrit récent. La détermination des racines du polynôme $R(t)$ a posé problème même aux candidats qui connaissaient les racines de l'unité, essentiellement pour des questions de logique.
Le deuxième exercice, un peu atypique dans sa forme, permettait de tester plusieurs notions d'analyse au programme. Il a posé de gros problèmes de logique, les candidats peinant à comprendre ce qu'il fallait montrer, et peinant à prouver les doubles inclusions même avec l'aide du jury.

Planche 14: Cette planche nous semblait relativement facile, mais elle n'a pas été très bien réussie. Dans le premier exercice, on pouvait s'assurer que les candidats comprenaient un minimum d'algèbre linéaire (dimension, base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produits de matrices diagonales, etc.), et la deuxième question pouvait être résolue rapidement si l'on savait qu'un polynôme de degré au plus $n-1$ ne peut admettre n racines distinctes sans être nul.
Le deuxième exercice commençait par une question de cours, qui était aussi une indication pour la suite. Le jury était surpris de voir que la question 3 a pu poser des difficultés aux candidats.

Planche 15: Le premier exercice portait sur un contre-exemple classique. À la première question, plusieurs candidats ont à tout prix voulu appliquer le théorème de la limite de la dérivée, alors que cela ne permet justement pas de conclure ici. À la question 2, il était seulement demandé de montrer l'existence d'un rang à partir duquel $y_k \leq 1/16$, et pas de trouver la valeur minimale possible pour ce rang (en approximant π). La conclusion de la troisième question a choqué l'intuition d'un candidat pourtant excellent.
La première question du deuxième exercice n'aurait pas dû poser la moindre difficulté : elle a été pourtant l'occasion de discriminer entre ceux qui ne connaissaient qu'approximativement leur cours et ceux qui comprenaient mieux les notions d'inversibilité et de diagonalisabilité (ainsi que le lien entre ces notions). La question 2 nécessitait des qualités de synthèse pour présenter correctement les réponses sans se perdre dans une multitude de cas particuliers. Il n'était bien évidemment pas attendu, pour les questions 3 et 4, que les candidats connaissent la diagonalisabilité des matrices symétriques ; dans le cas de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pouvait trouver la réponse seulement grâce à la question 2.

Planche 16: Le premier exercice, portant sur l'algèbre linéaire, ne posait aucune vraie difficulté. La question 4 seule nécessitait un peu plus d'initiative, même si son résultat n'est pas très suprenant.
La première question du deuxième exercice réclamait une explication claire, le résultat étant donné. Il fallait ensuite une certaine aisance :

celle-ci n'a pas manqué notamment à un candidat brillant, qui a presque su conclure.