Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $]-1,1[$ par les relations $f(0)=0$ et, pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{x}{\ln|x|} \cos\left(\frac{1}{x}\right) .$$

(1) Montrer que f est continue et dérivable en 0.

(2) A-t-on

$$f'(x) \to_{x \to 0} f'(0) \ ?$$

(3) Montrer:

$$\forall a \in]0,1[, \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in]-a,a[: \quad f'(x) = M .$$

Soient a, b, c trois nombres réels. On définit la suite u_n par les relations $u_1 = a, u_2 = b, u_3 = c$ et, pour $n \geqslant 4$,

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3}}{3} .$$

On pose également :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

(1) Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 3\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Calculer $P^{-1}AP$.

(2) Soit

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

Montrer que tous les coefficients de la matrice B^n tendent vers 0 quand l'entier n tend vers l'infini.

(3) Que dire de A^n quand n tend vers l'infini ?

(4) Montrer que la suite u_n converge, et déterminer sa limite.

Soit $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à termes positifs; pour tout $n \geqslant 1$ on pose $Q_n = p_1 + \cdots + p_n$ et on suppose que

(i) Q_n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini;
(ii) $\frac{p_n}{Q_n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

On pose alors pour tout $n \geqslant 1$:

$$R_n = \frac{p_1}{Q_1} + \cdots + \frac{p_n}{Q_n} \ .$$

(1) Donner un exemple de suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ satisfaisant les hypothèses requises, et pour laquelle vous connaissez un équivalent de R_n.
(2) Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux suites à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ quand n tend vers l'infini, et si la série de terme général v_n diverge, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \sum_{k=1}^{n} v_k$$

quand n tend vers l'infini.
(3) Montrer que $R_n \sim \ln(Q_n)$ quand n tend vers l'infini.

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire de densité

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \lambda \exp(-\lambda x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $L_n = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$ et $U_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$.

(1) Calculer la fonction de répartition de L_n, puis celle de U_n.

(2) Quelle est la loi de $Y_n = n\lambda L_n$?

(3) On pose $Z_n = \lambda U_n - \ln(n)$. Calculer la fonction de répartition F_n de Z_n, puis trouver la limite de $F_n(x)$ pour tout réel x quand n tend vers l'infini.

On dispose de n ampoules identiques, dont on modélise les durées de vie par des variables exponentielles indépendantes.

(4) On suppose que l'on sait seulement combien de temps a fonctionné l'ampoule qui a claqué le plus tôt. À partir de cette seule information, proposer un estimateur pour la durée de vie moyenne des ampoules. Cet estimateur est-il sans biais ?

(5) On suppose maintenant que l'on sait seulement combien de temps a fonctionné l'ampoule qui a claqué le plus tard. À partir de cette seule information, proposer un estimateur pour la durée de vie moyenne des ampoules.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une file d'attente avec un guichet et n clients qui attendent. Chaque minute, un guichet se libère. Le guichetier choisit alors le client qu'il appelle selon le processus aléatoire suivant:

- avec probabilité $1/2$, il appelle le client en première position dans la file,
- sinon, il choisit de manière équiprobable parmi les clients aux positions $2, \ldots, n$.

Enfin, un nouveau client arrive dans la file et se place en dernière position (de telle sorte qu'il y a toujours exactement n clients qui attendent).

(1) Quelle est la loi du temps d'attente pour un client qui se trouve en première position dans la file? Donner son espérance, sa variance.

(2) Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note $T_{k,n}$ le temps d'attente d'un client qui se trouve en position k dans la file. Montrer que $T_{k,n}$ admet une espérance et une variance finies.

(3) Écrire une relation entre $\mathbb{E}[T_{k,n}]$ et $\mathbb{E}[T_{k-1,n}]$ pour tout $k \geqslant 2$. En déduire une expression de $\mathbb{E}[T_{k,n}]$ en fonction de k et n.
Indication: On pourra montrer que la suite $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ définie par

$$u_k = \frac{n+k-2}{2(n-1)} \, \mathbb{E}[T_{k,n}]$$

est une suite arithmétique.

(4) Comparer les caractéristiques de cette file d'attente et d'une file d'attente "classique" (premier arrivé, premier servi).

Pour tout entier n, on note $n! = 1 \times \cdots \times n$, et on pose $0! = 1$. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite telle que, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \in \{-1, +1\}$. On pose

$$\ell = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} .$$

(1) Donner la valeur de ℓ quand $u_n = 1$, puis quand $u_n = (-1)^n$.

(2) Pour tout entier q strictement positif, montrer que

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} < \frac{1}{q} .$$

(3) Pour tout entier q strictement positif, montrer que

$$\sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{q!}{n!} < \frac{1}{q(q+1)} ,$$

(4) En déduire que ℓ n'est pas un nombre rationnel, c'est-à-dire ne peut pas s'écrire comme quotient p/q de deux entiers p et q.

On dit qu'une variable aléatoire à densité suit une loi de Cauchy de paramètre $x_0 \in \mathbb{R}$ lorsqu'elle admet pour densité la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{1}{\pi\Big(1 + (x - x_0)^2\Big)} \quad .$$

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire suivant une telle loi de Cauchy.

(1) Justifier le fait que f est bien une densité, et calculer la fonction de répartition de X. Tracer sur un même graphe la densité et la fonction de répartition de X (en prenant $x_0 = 1$).

(2) Pour tout $R > 0$, calculer
$$\int_{-R}^{R} x f(x) dx$$
puis sa limite lorsque R tend vers l'infini.
La variable X admet-elle une espérance? une variance? Lorsque c'est possible, donner leur valeur.

(3) On rappelle d'une médiane m de X est un réel vérifiant $\mathbb{P}(X \leqslant m) = \mathbb{P}(X \geqslant m) = 1/2$. Déterminer l'ensemble des médianes de X.

(4) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètre x_0. On note $\widehat{m}_n$ une médiane de $\{X_1, \ldots, X_n\}$, c'est-à-dire un réel satisfaisant
$$\mathrm{Card}\,\{\, i \in \{1, \ldots, n\} \;/\; X_i \leqslant \widehat{m}_n \,\} = \mathrm{Card}\,\{\, i \in \{1, \ldots, n\} \;/\; X_i \geqslant \widehat{m}_n \,\} \quad .$$
Montrer que $\widehat{m}_n$ converge lorsque n tend vers l'infini, et préciser sa limite.

On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les polynômes P à coefficients réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P\left(x^2\right) = P(x)P(x-1)\ .$$

(1) Trouver tous les polynômes $P \in \mathcal{E}$ de degré au plus 2.

(2) Soit $P \in \mathcal{E}$, et soit $Z_P = \{z \in \mathbb{C} : P(z) = 0\}$. On définit les applications f et g sur $\mathbb{C}$ par les relations :

$$f(z) = z^2, \quad g(z) = (z+1)^2\ .$$

Montrer :

$$\forall z \in Z_P, \quad \big\{f(z),\, g(z)\big\} \subset Z_P\ .$$

(3) En déduire que tout élément z de Z_P est de module 1, puis que

$$Z_P \subset \left\{e^{-\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}\right\}\ .$$

(4) Conclure.

Soit a un réel strictement supérieur à 1. On définit la suite u_n par récurrence de la façon suivante : $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2, u_{n+1} = a^{u_n}$.

(1) Faire l'étude sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $f : x \mapsto a^x - x$, et tracer grossièrement son graphe.

(2) Dans cette question seulement, on prend $a = \sqrt{2}$. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$.

(3) Déterminer l'ensemble des valeurs de $a > 1$ pour lesquelles la suite $(u_n)_n$ converge.

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages sans remise tant que les numéros obtenus forment une suite strictement croissante.

(1) Déterminer la loi de la variable aléatoire X représentant le nombre de tirages effectués.
(2) Montrer que $E[X] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k)$.
(3) Déterminer $E[X]$, et sa limite quand n tend vers l'infini.
(4) Reprendre les questions précédentes, en supposant cette fois que les boules sont tirées *avec* remise. Comparer les deux résultats.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, $S = X + Y$ et $P = XY$. On suppose que $X < 0 < Y$, et l'on suppose que S et P admettent une variance.

(1) Exprimer X et Y en fonction de S et P.

(2) Déterminer, si c'est possible, $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$, en fonction des espérances de S et P.

(3) Déterminer, si c'est possible, $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ et $\mathbb{E}\left[Y^2\right]$, en fonction des espérances et variances de S et P.

(4) On suppose que X et Y ne prennent que des valeurs entières, avec $\mathbb{P}(X = -1) > 0$ et $\mathbb{P}(Y = 1) > 0$. Est-il possible d'avoir S et P indépendantes? Si oui, quelles lois sont possibles pour X et Y ?

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par les relations $u_0 = 1/2$ et

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2} .$$

(1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge, et déterminer sa limite.

(2) Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $v_n = 1/(1-u_n)$. Montrer que v_n est bien défini pour tout n, puis montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+u_k} .$$

(3) En déduire que

$$u_n = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) .$$

(4) Montrer que

$$u_n = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) .$$

Dans cet énoncé, si A désigne un ensemble de nombres entiers et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, on écrit

$$\sum_{k\in A, k\leqslant n} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k \mathbb{I}\{k \in A\} .$$

On dit que l'entier naturel a divise l'entier naturel b s'il existe un entier c tel que $b = ac$: on note alors $a|b$. On note

$$P = \left\{k \in \mathbb{N}^* : \forall c \in \mathbb{N}^*,\ c|k \implies c \in \{1, k\}\right\}$$

l'ensemble des nombres premiers,

$$C = \left\{k^2 : k \in \mathbb{N}^*\right\}$$

l'ensemble des nombres entiers qui sont des carrés, et

$$F = \left\{k \in \mathbb{N}^* : \forall c \in \mathbb{N}^*,\ c^2|k \implies c = 1\right\}$$

l'ensemble des entiers naturels sans facteur carré.

(1) Pour $E \in \{P, C, F\}$, que vaut $E \cap \{1, \ldots, 10\}$?

(2) La suite de terme général

$$u_n = \sum_{k\in C, k\leqslant n} \frac{1}{k}$$

est-elle convergente ?

(3) Montrer que pour tout entier n strictement positif :

$$\left(\sum_{k\in C, k\leqslant n} \frac{1}{k}\right)\left(\sum_{k\in F, k\leqslant n} \frac{1}{k}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

(4) Montrer que pour tout entier n strictement positif :

$$\exp\left(\sum_{k\in P, k\leqslant n} \frac{1}{k}\right) \geqslant \prod_{k\in P, k\leqslant n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \geqslant \sum_{k\in F, k\leqslant n} \frac{1}{k} .$$

(5) La suite de terme général

$$v_n = \sum_{k\in P, k\leqslant n} \frac{1}{k}$$

est-elle convergente ?

Soit $X = (Y, Z)$ un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\{0, 1\}^2$, de loi:

$$P(Y = 1; Z = 1) = r \qquad P(Y = 0; Z = 1) = p - r$$
$$P(Y = 1; Z = 0) = p - r \qquad P(Y = 0; Z = 0) = 1 - 2p + r$$

où $0 < r < p$ et $0 < 1 - 2p + r$. On considère une suite de variables indépendantes $X_i = (Y_i; Z_i)$ de même loi que X. On pose $U = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ et $V = \sum_{i=1}^{n} Z_i$.

(1) Quelles sont les lois des variables U et V ?

(2) Calculer la covariance de Y_1 et Z_1. Pour quelle valeur de r cette covariance est-elle nulle? Les variables Y_1 et Z_1 sont-elles indépendantes?

(3) Déduire de la question précédente la covariance de U et V.

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels *converge au sens de Césaro* vers r si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = r\ .$$

On dit qu'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est *continue au sens de Césaro* en $r\in\mathbb{R}$ si, pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ convergeant vers r au sens de Césaro, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge vers $f(r)$ au sens de Césaro.

(1) Soient a et b deux réels quelconques. Montrer que la suite

$$-a, -b, (a+b), -a, -b, (a+b), \ldots$$

converge au sens de Césaro vers 0.

(2) Montrer que si f est continue en 0 au sens de Césaro, et si $f(0)=0$, alors

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

pour tous réels a et b.

(3) Montrer que si f est continue en 0 au sens de Césaro, alors f est continue (au sens usuel) en 0. On pourra pour cela montrer que si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite quelconque, il existe une suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ telle que pour tout n, $(y_1+\cdots+y_n)/n = x_n$.

(4) Déduire des questions précédentes que les seules fonctions continues en un point au sens de Césaro sont les fonctions affines.

Soit X une variable aléatoire positive dont la densité f est (continue et) strictement positive sur $\mathbb{R}^+$. On note μ son espérance (supposée finie) et m sa médiane.

(1) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que
$$\int_0^\ell xf(x)dx = \int_\ell^{+\infty} xf(x)dx.$$
Ce réel ℓ est appelé la *médiale* de X.

(2) Montrer que $m < \ell$.

(3) Dans cette question seulement, on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Dans quel ordre se classent μ, m et ℓ ?

Un *bit* est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1. Un canal de transmission transmet des bits avec erreur selon le modèle suivant : il transmet fidèlement un bit avec probabilité p et de façon erronée avec probabilité $(1-p)$ où $0 < p < 1$. Un bit traverse n canaux de ce type successivement, et on suppose que chaque canal fonctionne indépendamment des autres canaux. On note X_0 le bit émis à l'entrée du premier canal, et X_k le bit reçu en sortie du k-ième canal (pour tout entier k compris entre 1 et n).

(1) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X_k = 1 | X_{k-1} = 1)$ et $\mathbb{P}(X_k = 1 | X_{k-1} = 0)$.

(2) On note π_n le vecteur de coordonnées $[\mathbb{P}(X_n = 0),\ \mathbb{P}(X_n = 1)]$. Préciser la relation qui relie π_n à π_{n-1}.

(3) En déduire l'expression de π_n en fonction de π_0, n et p.

(4) Quelle est la probabilité que l'information émise à l'entrée du premier canal, soit fidèlement transmise par le canal n? Que devient cette quantité quand n tend vers l'infini ?

Soit $a \in]0,1]$ et f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On définit

$$\overline{f}_a = \frac{1}{a}\int_0^a f(t)dt$$

la moyenne de f sur $[0,a]$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G_a(x) = \frac{1}{a}\int_0^a (f(t)-x)^2\,dt\ .$$

(1) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_a(x) = \left(x - \overline{f}_a\right)^2 + G_a\left(\overline{f}_a\right)\ .$$

La fonction G_a admet-elle un minimum global unique?

(2) Montrer que $\overline{f}_a \to f(0)$ lorsque $a \in]0,1]$ tend vers zéro.

On suppose désormais que f est deux fois continûment dérivable sur $[0,1]$, et l'on cherche à déterminer un équivalent de

$$G_a\left(\overline{f}_a\right) = \frac{1}{a}\int_0^a \left(f(t) - \overline{f}_a\right)^2 dt$$

lorsque $a \in]0,1]$ tend vers zéro.

(3) Montrer que

$$\exists C > 0, \quad \forall a \in]0,1], \quad \left|\overline{f}_a - f(0)\right| \leqslant Ca$$

Y a-t-il égalité pour certaines fonctions f ?

(4) On admet le résultat suivant (formule de Taylor-Lagrange): pour tout $u \in]0,1]$, il existe $h(u) \in]0,u[$ tel que

$$f(u) = f(0) + uf'(0) + \frac{u^2}{2}f''(h(u))\ .$$

En déduire un équivalent de

$$\overline{f}_a - f(0)$$

lorsque $a \in]0,1]$ tend vers zéro.

(5) Déterminer un équivalent de $G_a\,(f(0))$ lorsque $a \in]0,1]$ tend vers zéro. Conclure.

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{G}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé par l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et de dérivée continue. On note $\#A$ le cardinal d'un ensemble A.

Soit n un entier strictement positif, et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels tels que $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.

(1) Montrer que
$$F = \left\{ x \mapsto e^{\lambda_i x} : i \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$
est une famille libre de $\mathcal{G}$.

On note $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{G}$ qu'engendre la famille F. Pour tout élément $f \in \mathcal{F}$ et pour tout réel λ, on définit
$$T_\lambda(f) = \left(x \mapsto e^{\lambda x} \frac{d\left[e^{-\lambda x} f(x)\right]}{dx} \right) ,$$
$$Z(f) = \#\big\{ x \in \mathbb{R} : f(x) = 0 \big\} .$$
En outre, si $f \in \mathcal{F}$ est tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + a_n e^{\lambda_n x}$, on note
$$C(f) = \#\big\{ i \in 2, \ldots, n : a_{i-1} a_i < 0 \big\} .$$
D'après la première question, l'application C est bien définie sur $\mathcal{F}$.

(2) Montrer que $\mathcal{F}$ est stable par T_λ pour tout réel λ.

(3) Soit $f \in \mathcal{F}$ tel que $f(x) = a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + a_n e^{\lambda_n x}$, et tel que $C(f) \neq 0$. Si $i \in \{2, \ldots, n\}$ est tel que $a_{i-1} a_i < 0$, montrer que pour tout réel λ de l'intervalle $]\lambda_{i-1}, \lambda_i[$ on a simultanément :
$$Z\big(T_\lambda(f)\big) \geqslant Z(f) - 1 \quad \text{et}$$
$$C\big(T_\lambda(f)\big) = C(f) - 1 .$$

(4) En déduire que, pour tout élément non nul f de $\mathcal{F}$, on a
$$Z(f) \leqslant C(f) .$$

Soit $a, u_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n, ...$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que pour tout entier i,

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_i\right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\varepsilon_i^2\right] = \sigma^2 > 0 \ .$$

On définit alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = a u_n + \varepsilon_n \ .$$

(1) Calculer l'espérance de u_n pour tout entier $n \geqslant 0$.
(2) On suppose les ε_i de loi normale. Quelle est la loi de u_n?
(3) On suppose $a = 1$. Montrer que u_n/n converge lorsque n tend vers l'infini vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, puis déterminer la loi limite de $(u_n - \ell)/\sqrt{n}$ lorsque n tend vers l'infini.
(4) Même question lorsque $a = -1$.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. On dit qu'un réel $c \in [0,1]$ est une *corde* de f s'il existe un réel $x \in [0, 1-c]$ tel que $f(x+c) = f(x)$.

(1) Montrer que $0, 1$ et $1/2$ sont des cordes de f.

(2) Montrer que tous les nombres de l'ensemble $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ sont des cordes de f.

(3) Soit $c \in [0,1] \setminus A$, et soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par la relation :

$$g(x) = x + \frac{\cos\left(\frac{2\pi x}{c}\right)}{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{c}\right)} .$$

Montrer que g est continue et telle que $g(0) = g(1)$. Le réel c est-il une corde de g ?

Soit $n \geqslant 1$ un entier et $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose pour tout i compris entre 1 et n, X_i suit une loi uniforme sur $[0, \mu]$, pour un certain réel $\mu > 1$, et Y_i suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on observe

$$Z_i = \min\{X_i , Y_i\} \quad ,$$

et l'on souhaite en déduire le paramètre μ.

(1) Déterminer la fonction de répartition de Z_1.
(2) Calculer l'espérance de Z_1.
(3) Proposer un estimateur de μ.
(4) Calculer la variance de Z_1.
(5) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Proposer un intervalle de confiance de probabilité de couverture $1 - \alpha$ pour μ.

Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes à valeur dans l'ensemble $\{0, \ldots, 5\}$, soit P_Y le polynôme défini par la relation $P_Y(t) = \mathbb{E}\left[t^Y\right]$, et soit P_Z le polynôme défini par la relation $P_Z(t) = \mathbb{E}\left[t^Z\right]$.

(1) Exprimer, pour tout $k \in \{0, \ldots, 10\}$, $P(Y + Z = k)$ à l'aide du polynôme produit $P_Y P_Z$.
(2) Quelles sont les racines réelles et complexes du polynôme $R(t) = 1 + t + \cdots + t^{10}$?
(3) La somme de deux dés à six faces, éventuellement pipés, peut-elle avoir une loi uniforme ?
(4) La somme de deux dés à six faces pipés peut-elle avoir la même loi que la somme de deux dés à six faces équilibrés ?

Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble

$$\{\,(x, g(x))\,/\,x \in [0,1] \text{ et } g \in \mathcal{G}\,\}$$

lorsque $\mathcal{G}$ est l'un des ensembles suivants:

(1) $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 = \{\,g : [0,1] \mapsto [0,1] \text{ continue}\,\}$.
(2) $\mathcal{G} = \mathcal{G}_2 = \{\,g \in \mathcal{G}_1\,/\,g(0) = 0 \text{ et } \forall x, y \in [0,1]\,,\ |g(x) - g(y)| \leqslant |x - y|\,\}$.
(3) $\mathcal{G} = \mathcal{G}_3 = \left\{\,g : [0,1] \mapsto [0,1] \text{ dérivable}\,/\,g(0) = 0\,,\ g(1) = \frac{1}{2} \text{ et } \forall x \in [0,1]\,,\ |g'(x)| \leqslant 1\,\right\}$.
(4) $\mathcal{G} = \mathcal{G}_4 = \{\,g \in \mathcal{G}_1 \text{ deux fois dérivable}\,/\,g(0) = g'(0) = 0\,,\ |g''(x)| \leqslant 1\,\}$.
(5) $\mathcal{G} = \mathcal{G}_5 = \{\,g \in \mathcal{G}_3 \text{ deux fois dérivable}\,/\ |g''(x)| \leqslant 1\,\}$.

Soit n un entier strictement positif, et soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales. Soit $A \in \mathcal{D}$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont distincts deux à deux.

(1) Montrer que $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
(2) Montrer que la famille $\left(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\right)$ est une base de $\mathcal{D}$.
(3) Déterminer $\left\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AB = BA\right\}$.

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

(1) Calculer l'espérance, puis la variance de X.

(2) Soit $k \geqslant 1$ un entier. Montrer que $\mathbb{E}\left[X^k\right]$ est bien définie, et exprimer sa valeur en fonction de $(\mathbb{E}\left[X^j\right])_{0 \leqslant j \leqslant k-1}$.

(3) En fonction de la valeur de $\lambda > 0$, la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathbb{E}\left[X^k\right]$ converge-t-elle?

(4) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X}\right]$$

est bien définie et calculer sa valeur.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par les relations $f(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$,

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{4}\ .$$

(1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 1/4$.

(2) Pour tout entier k strictement positif, on définit

$$x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{3} + k\pi} \qquad \text{et} \qquad y_k = \frac{1}{-\frac{\pi}{3} + k\pi}\ .$$

Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall k \geqslant k_0, y_k \leqslant 1/16$, puis montrer :

$$\forall k \geqslant k_0, \forall x \in]x_k, y_k[, \quad f'(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) < 0\ .$$

(3) Existe-t-il un réel $\varepsilon > 0$ tel que la fonction f soit croissante sur l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$?

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

(1) Déterminer l'ensemble des valeurs propres des matrices suivantes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sont-elles diagonalisables? inversibles?

(2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice carrée d'ordre 2 quelconque. En fonction de a, b, c, d, déterminer le nombre de valeurs propres réelles distinctes de A.

À quelles conditions sur a, b, c, d la matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

(3) Trouver deux sous-espaces vectoriels E et F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que tous les éléments de E sont diagonalisables, tous les éléments non-nuls de F sont non-diagonalisables, et $E + F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. E et F sont-ils en somme directe?

(4) On considère désormais les matrices carrées d'ordre $n \geqslant 1$ quelconque. Chercher des sous-espaces vectoriels E et F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimensions aussi grandes que possible, tels que tous les éléments de E sont diagonalisables et tous les éléments non-nuls de F sont non-diagonalisables.

Soit $n \geqslant 1$ un entier et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\operatorname{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,i}$$

la trace de M.

(1) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{Tr}({}^tMM) \geqslant 0$ et déterminer les éventuels cas d'égalité.

(2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée. Montrer que

$$\operatorname{Tr}\left({}^t(M + \lambda I_n)(M + \lambda I_n)\right)$$

est un polynôme de degré deux en λ dont on précisera les coefficients.

(3) Déduire des deux questions précédentes que

$$(\operatorname{Tr}(M))^2 \leqslant n \operatorname{Tr}\left({}^tMM\right) \quad ,$$

et préciser les cas d'égalité.

(4) Calculer

$$\inf_{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\, \operatorname{Tr}(M)>0} \left\{ \frac{\operatorname{Tr}\left({}^tMM\right)}{\operatorname{Tr}(M)} \right\} \quad .$$

Quelle est la probabilité que, dans une classe de m élèves, deux au moins soient nés le même jour de l'année ? Pour répondre à cette question, on considère le modèle suivant : les dates de naissance des élèves sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi P à valeur dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ avec $n = 365$ (on ignore les années bissextiles). Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $p_i = P(\{i\})$, et on note $\pi(p_1, \ldots, p_n)$ la probabilité recherchée.

(1) Montrer que
$$1 - \pi(p_1, \ldots, p_n) = m! \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} p_{i_1} \ldots p_{i_m} \ .$$

(2) Montrer que
$$\pi\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \geqslant 1 - \exp\left(-\frac{m(m-1)}{2n}\right) \ .$$

(3) Montrer que
$$\pi(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) \geqslant \pi\left(\frac{p_1 + p_2}{2}, \frac{p_1 + p_2}{2}, p_3 \ldots, p_n\right) \ .$$

(4) En déduire pour quelle loi P la probabilité $\pi(p_1, \ldots, p_n)$ est minimale.