

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel euclidien de dimension finie d . On notera $\langle x | y \rangle$ le produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme induite.

Un sous-ensemble C de E est *convexe*, si pour tous $x, y \in C$, et $\lambda \in [0, 1]$, $(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$.

Etant donné K une partie non-vide de E , l'*enveloppe convexe* $\text{Conv}(K)$ de K est l'intersection de tous les convexes contenant E . On dit qu'une partie non vide A de K est *extrémale* si et seulement si :

$$\forall x, y \in K, \forall \lambda \in]0, 1[, \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in A \implies x, y \in A.$$

On dit qu'un point $a \in K$ est *extrémal* si $\{a\}$ l'est.

Partie I. Préliminaires

1) Soit $K \subset E$.

a) Montrer que $\text{Conv}(K)$ est l'ensemble des $x \in E$ tels qu'il existe un entier k , des points $x_1, \dots, x_k \in K$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ tels que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad \text{et} \quad x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i.$$

b) Montrer que dans la question précédente, on peut choisir $k \leq d + 1$.

2) a) Quels sont les points extrémaux du simplexe

$$S = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \forall i, x_i \geq 0, \text{ et } x_1 + \dots + x_d = 1\}$$

b) Quels sont les points extrémaux de la boule unité fermée $\{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$?

c) Donner un exemple d'ensemble convexe borné sans point extrémal.

Partie II. Matrices bistochastiques

Soit n un entier, on note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit la matrice de permutation $M_\sigma = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ par

$$a_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}.$$

On dit que $M = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ est matrice bistochastique si $a_{i,j} \geq 0$ pour tous i, j et

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n a_{j,i} = 1. \quad (*)$$

On note $\mathbb{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $\mathbb{B}_n$ est compact et convexe.

2) Montrer qu'une matrice de permutation est un point extrémal de $\mathbb{B}_n$.

3) Soit $\mathbb{F}_n$ l'espace vectoriel des matrices $M = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n a_{j,i} = 0.$$

Montrer que $\dim \mathbb{F}_n = (n - 1)^2$.

4) Soit M un point extrémal de $\mathbb{B}_n$.

- a) Montrer que M a au plus $2n - 1$ coefficients non nuls.
- b) En déduire que M est une matrice de permutation.

Partie III. Séparation des convexes

- 1) Soit $C \subset E$ un convexe fermé.
 - a) Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un unique point $p_C(x) \in C$ tel que $\|x - p_C(x)\| = \inf\{\|x - y\| \mid y \in C\}$, et que pour tout $y \in C$, $\langle x - p_C(x) \mid y - p_C(x) \rangle \leq 0$.
 - b) En déduire que pour tous $x, y \in E$, $\|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|$.
- 2) Soit A et B deux convexes disjoints. On suppose que A est compact et B est fermé.
 - a) Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in A \times B$ tel que

$$\|a - b\| = \inf\{\|x - y\| \mid x \in A, y \in B\} > 0.$$

- b) En déduire qu'il existe une forme linéaire continue $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\sup\{\ell(x) \mid x \in A\} < \inf\{\ell(y) \mid y \in B\}.$$

Partie IV. Théorème de Krein-Milman

On souhaite démontrer le théorème suivant, dit de Krein-Milman : si K est une partie convexe compacte de E , K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

- 1) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties extrémales fermées (non vides) de K . On ordonne (partiellement) $\mathcal{F}$ par l'inclusion inverse :

$$A \preceq B \iff B \subset A.$$

Soit $(I, \leq)$ un ensemble totalement ordonné, et $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{F}$ tel que pour tout $i, j \in I$, si $i \leq j$, alors $A_i \preceq A_j$. Montrer que $(A_i)_{i \in I}$ admet un majorant pour l'ordre $\preceq$.

- 2) Soit $A \in \mathcal{F}$, et $\ell \in E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Montrer que $A^\ell := \{x \in A \mid \forall y \in A, \ell(x) \geq \ell(y)\}$ appartient à $\mathcal{F}$.
- 3) En déduire que tout ensemble maximal de $\mathcal{F}$ est réduit à un seul élément.
- 4) Montrer que K admet un point extrémal.
- 5) Démontrer le théorème de Krein-Milman.
- 6) Soit $M \in \mathbb{B}_n$ une matrice bistochastique. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ et des matrices de permutation $M_1, \dots, M_k$ tels que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad M = \sum_{i=1}^k \lambda_i M_i, \quad \text{et} \quad k \leq (n-1)^2 + 1.$$