Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ les suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+3k-4}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(2k+1)(2k+3)} \ .$$

(1) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent respectivement vers des limites qu'on note u et v.

(2) Pour tout $\lambda > 0$, rappeler la définition de la loi de Poisson de paramètre λ, et donner les valeurs de son espérance et sa variance. En déduire u.

(3) Calculer v.

Soit $n \geqslant 1$ un entier et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout polynôme P de E_n, on note P' son polynôme dérivé. On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E_n , associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = (X^2 - 1)P'(X) - (nX + 1)P(X) \ .$$

(1) Propriétés générales.
 (a) Calculer $f(X^n)$, $f(1)$, puis $f(X^k)$ pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.
 (b) Montrer que f est un endomorphisme de E_n et donner la matrice A de f dans la base canonique de E_n.
(2) Lorsque $n = 1$, déterminer toutes les valeurs propres puis tous les sous-espaces propres de f.
(3) On suppose désormais que n est un entier naturel non nul quelconque.
 (a) Montrer que si un polynôme P est vecteur propre de l'endomorphisme f alors P est de degré n.
 (b) Montrer que si P est vecteur propre de f et r est une racine simple de P, alors $r \in \{-1, 1\}$.
 (c) Faire de même lorsque r est une racine multiple de P.
 En déduire les valeurs propres et vecteurs propres associés de l'endomorphisme f.
 L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Soit F sa fonction de répartition. On suppose que

- F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
- X admet une espérance,
- $\lim_{x\to+\infty} x\,(1 - F(x) + F(-x)) = 0$.

(1) Montrer que
$$\mathbb{E}\,[X] = \int_0^{+\infty} (1 - F(x) - F(-x))dx \ .$$

(2) On suppose que X^2 admet une espérance finie. Exprimer de même $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ en fonction de F.

Soit $n \geqslant 2$ un entier, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels à n lignes et n colonnes, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient $A_{i,j}$ vaut 1 si $i < j$ et 0 sinon.

(1) Quel est le rang de A? A est-elle inversible?
Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A. Est-elle diagonalisable?

(2) Trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 telle que $A + B$ est inversible.

(3) Soit $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le rang de $M + M'$ est inférieur ou égal à la somme des rangs de M et M'.

(4) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $r < n$ et $p \leqslant n - r$ un entier. Montrer qu'il existe une matrice $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang p telle que $M + M'$ est de rang $p + r$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? En donner une base.

(2) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que la famille $I_n, M, M^2, \ldots, M^k$ est liée. Dans la suite, on notera $\alpha(M)$ le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que la famille $I_n, M, M^2, \ldots, M^k$ est liée.

(3) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, montrer que $M, \ldots, M^{\alpha(M)}$ est libre.

(4) Réciproquement, si $M, \ldots, M^{\alpha(M)}$ est libre, montrer que M est inversible et que son inverse peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $I_n, M, \ldots, M^{\alpha(M)}$.

François prend le TGV sans avoir eu le temps de réserver sa place. Il monte donc dans la première voiture, initialement vide, et s'assied à l'une des N places disponibles. Il voit ensuite les passagers (munis de réservation) monter un à un. Lorsqu'un passager se présente avec une réservation pour la place occupée par François, celui-ci laisse sa place, et va s'asseoir sur le siège vide le plus proche.

On suppose que les passagers arrivent l'un après l'autre, et on modélise la place réservée par le passager qui arrive par une variable aléatoire uniforme parmi l'ensemble des places "libres" (c'est-à-dire, les sièges vides plus la place où est assis François).

(1) On suppose que $k \geqslant 0$ passagers avec réservation sont déjà installés. Quelle est la probabilité pour que le $(k+1)$-ème passager ait réservé la place où est alors assis François?

(2) Pour tout $k \in \{1, \ldots, N-1\}$, quelle est la probabilité pour que François voie s'installer k passagers en ayant à se déplacer à chaque fois? sans avoir à se déplacer?

(3) Pour tout $k \in \{1, \ldots, N-1\}$, quelle est l'espérance du nombre de déplacements qu'a dû faire François après que k passagers se sont installés?

(4) Le train s'avère être complet, et François finit par voyager debout. Quelle est l'espérance du nombre de déplacements qu'a dû faire François avant cela, en fonction de N? En donner un équivalent lorsque $N \to +\infty$.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deux matrices carrées de taille $n \geqslant 2$. Autrement dit, $A_{i,j} = 1$ si $i \leqslant j$ et 0 sinon, $B_{i,j} = 1$ si $i = j$ ou $i = j - 1$, 0 sinon.

(1) Les matrices A et B sont-elles diagonalisables? Quelles sont leurs valeurs propres?
(2) Si B est inversible, calculer l'inverse de B.
(3) Si A est inversible, calculer l'inverse de A.

On rappelle que pour tout entier $n \geqslant 1$, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ désigne le produit des entiers de 1 à n.

(1) Calculer
$$\int_0^1 \ln(1+x)dx \ .$$

(2) En déduire que
$$\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}$$
converge vers une limite finie ℓ lorsque n tend vers l'infini, dont on précisera la valeur.

(3) De même, déterminer la limite de
$$\frac{1}{n}\left(n!\right)^{1/n}$$
lorsque n tend vers l'infini.

(4) Soit $n \geqslant 1$ un entier. Dans une classe de $4n$ enfants, $2n$ filles et $2n$ garçons, le professeur d'EPS décide de constituer aléatoirement deux équipes de même effectif $2n$, uniformément parmi les possibilités. Quelle est la probabilité que ces deux équipes soient chacune à parité (c'est-à-dire, constituées de n filles et n garçons chacune)?
À l'aide des résultats précédents, peut-on calculer un équivalent de son logarithme lorsque n tend vers l'infini?

Les nombres d'objets produits quotidiennement sur une chaîne de montage sont supposés être des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre inconnu λ. On note S le nombre d'objets produits au cours d'une semaine donnée (de 5 jours ouvrables) et T le nombre total d'objets produits au cours de cette même semaine ainsi que la suivante.

(1) Soit $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer les valeurs de $t \in \mathbb{R}$ telles que la transformée de Laplace $\mathbb{E}\left[e^{tN}\right]$ est bien définie et donner sa valeur.

On admet que la transformée de Laplace caractérise la loi, c'est à dire que, si N' et N'' sont deux variables aléatoires telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[e^{tN'}\right] = \mathbb{E}\left[e^{tN''}\right]$, alors $N' \sim N''$.

(2) Déterminer la loi de S et celle de T. Quelle est la loi de T sachant $S = k$?

(3) Calculer la loi de S sachant que $T = n$ en utilisant la formule de Bayes.

(4) En déduire une majoration de la probabilité pour que l'écart (en valeur absolue) entre S et $T/2$ soit supérieur ou égal à k sachant que $T = n$.

Soit α un réel non nul et soit
$$M = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} .$$

(1) Montrer que M est inversible, calculer son inverse M^{-1} puis $(M^{-1})^2$.

(2) Soient a, b, c des réels fixés. Montrer que la fonction f_α, définie pour tout réel x par
$$f_\alpha(x) = e^{\alpha x}(a\sin(x) + b\cos(x) + c)$$
possède une primitive de la forme
$$\Phi_\alpha(x) = e^{\alpha x}(A\sin(x) + B\cos(x) + C)$$
avec $A, B, C \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} .$$

(3) On suppose $\alpha > 0$. Montrer, pour tout réel x, la convergence de l'intégrale
$$F_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{x} te^{\alpha t}\left(a\sin(t) + b\cos(t) + c\right) dt .$$

(4) Montrer que F_α s'écrit sous la forme suivante
$$F_\alpha(x) = e^{\alpha x}\left((xA - A')\sin(x) + (xB - B')\cos(x) + (xC - C')\right) ,$$
et exprimer les constantes A', B', C' en fonction de a, b, c et $(M^{-1})^2$.

On définit trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n + 3v_n - 3w_n \\ -u_n + w_n \\ -u_n + v_n \end{pmatrix} \quad .$$

(1) Déterminer une matrice A telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad .$$

(2) Pour tout entier $n \geqslant 0$, exprimer $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$, A et n.

(3) Montrer que A est diagonalisable et préciser ses sous-espaces propres.

(4) En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ des variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$. On note

$$p = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) \qquad q = \mathbb{P}(\varepsilon_2 = 1) \quad \text{et} \quad r = \mathbb{P}(\varepsilon_3 = 1) \ .$$

(1) On suppose, dans cette question seulement, que ε_1 et ε_2 sont indépendantes. Déterminer la loi de leur produit $\varepsilon_1 \varepsilon_2$.

(2) À quelle condition sur $p, q \in [0, 1]$ est-il possible de construire deux variables aléatoires X, Y, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que $Y = \varepsilon_1 X$ et $X = \varepsilon_2 Y$?
Dans le cas où c'est possible, quelles sont les lois jointes possibles pour $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$?

(3) Pour des valeurs fixées de $p, q \in [0, 1]$, quel est l'ensemble des lois possibles pour le produit $\varepsilon_1 \varepsilon_2$?

(4) À quelle condition sur $p, q, r \in [0, 1]$ est-il possible de construire trois variables aléatoires X, Y, Z, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que $Y = \varepsilon_1 X$, $Z = \varepsilon_2 Y$ et $X = \varepsilon_3 Z$?

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la matrice 2×2 suivante:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad .$$

(1) Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Calculer l'image par R_θ du vecteur

$$X_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos(\theta') \\ \sin(\theta') \end{pmatrix}$$

puis représenter graphiquement $X_{\theta'}$ et $R_\theta X_{\theta'}$.

(2) Montrer que pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$, puis que R_θ est inversible, d'inverse égal à

$$R_{-\theta} = {}^t R_\theta \quad .$$

(3) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer les valeurs propres réelles de R_θ et les vecteurs propres correspondants. Pour quelles valeurs de θ la matrice R_θ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

(4) Soit $X \in \mathbb{R}^2$ fixé et $Y_\theta = R_\theta X$. Déterminer

$$\max_{\theta \in \mathbb{R}} \{ |(Y_\theta)_1| + |(Y_\theta)_2| \}$$

puis

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}} \{ |(Y_\theta)_1| + |(Y_\theta)_2| \}$$

et comparer leurs valeurs à

$$\sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad .$$

Soient n et p des entiers non nuls et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n+p$. On convient que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est nul si $k > n$ ou si $k < 0$. Le but de l'exercice est de calculer la somme

$$S = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell}\binom{p}{k-\ell}$$

de différentes manières.

(1) Utiliser la formule du binôme dans l'identité $(1+x)^{n+p} = (1+x)^n(1+x)^p$ puis déterminer S.

(2) Soient $X_1, \dots, X_{n+p}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Déterminer la loi de $S_{n+p} := \sum_{i=1}^{n+p} X_i$, de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et de $S'_p := \sum_{i=n+1}^{n+p} X_i$. Calculer alors $\mathbb{P}(S_{n+p} = k)$ directement puis en décomposant cet événement selon les valeurs possibles de S_n.

(3) Un ensemble $\mathcal{E}$ est la réunion de deux ensembles disjoints $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ avec $\mathrm{Card}(\mathcal{E}_1) = n$ et $\mathrm{Card}(\mathcal{E}_2) = p$. Déterminer le nombre de sous-ensembles de $\mathcal{E}$ à k éléments. Déterminer pour tout $\ell \in \{0, \dots, k\}$ le nombre de parties de $\mathcal{E}$ à k éléments contenant exactement ℓ éléments de $\mathcal{E}_1$. Conclure.

(4) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

On pose $u_1 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} .$$

(1) Donner un équivalent de $u_{2n} + u_{2n+1}$ lorsque n tend vers l'infini.
(2) La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est-elle convergente?
(3) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \ln(1+u_n) - u_n$. Donner un équivalent de v_n lorsque n tend vers l'infini.
(4) La suite de terme général $w_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + u_k)$ est-elle convergente?

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Une classe de troisième du collège Pablo Picasso comprend $2n$ filles et $2n$ garçons. Le professeur principal est chargé de constituer $2n$ binômes, et décide de le faire aléatoirement, en choisissant les binômes uniformément parmi toutes les possibilités. Indépendamment, le professeur de physique constitue n groupes de quatre pour des séances de travaux pratiques, également en procédant à un choix aléatoire, uniforme parmi l'ensemble des possibilités.

(1) Antoine et Charlotte souhaiteraient être en binôme. Quelle est la probabilité que cela se produise?
Quelle est la probabilité qu'ils soient dans le même groupe de quatre? Et qu'ils soient simultanément dans le même binôme et le même groupe de quatre?

(2) Combien y a-t-il de manières de constituer $2n$ binômes mixtes (c'est-à-dire, un garçon et une fille)?
Quelle est la probabilité que chaque binôme choisi par le professeur principal soit constitué d'un garçon et d'une fille?

(3) Combien y a-t-il de manières de choisir les n groupes de quatre?
Quelle est la probabilité que chaque groupe de quatre soit constitué de deux garçons et deux filles?

(1) Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série
$$\sum_{n \geqslant 1} e^{-n^2 x}$$
converge-t-elle? On notera D l'ensemble de ces valeurs.

(2) Pour tout $x \in D$, on pose
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x} \quad .$$
Encadrer $f(x)$ à l'aide de
$$\int_a^b e^{-t^2 x} dt$$
pour des bornes d'intégration a et b (éventuellement infinies) bien choisies.

(3) Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \in D$ tend vers zéro.

Alice joue au jeu de hasard suivant:
On fixe un entier $M \geqslant 2$.
Initialisation (étape 0): un nombre X_0 est choisi aléatoirement, avec une loi uniforme sur $\{1, \ldots, M\}$, et révélé à Alice.
Étape $k \geqslant 1$: Alice choisit parmi "+", "−" et "Stop".

- Si Alice a choisi "Stop", le jeu s'arrête et Alice gagne k.
- Sinon, un nombre X_k est choisi aléatoirement, avec une loi uniforme sur $\{1, \ldots, M\}$, et révélé à Alice.
  - Si Alice a choisi "+" et que $X_k \leqslant X_{k-1}$, le jeu s'arrête et Alice a perdu (elle gagne 0).
  - Si Alice a choisi "−" et que $X_k \geqslant X_{k-1}$, le jeu s'arrête et Alice a perdu (elle gagne 0).
  - Sinon, le jeu continue à l'étape $k+1$.

On pourra éventuellement utiliser sans les démontrer les formules suivantes, valables pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad .$$

(1) Donner l'espérance et la variance de X_0.
(2) Sachant que le jeu arrive à l'étape k, que $X_{k-1} = a \in \{1, \ldots, M-1\}$ et qu'Alice choisit "+" à l'étape k: quelle est la probabilité pour Alice de perdre à l'étape k? quelle est son espérance de gain (en supposant qu'elle a prévu de choisir "Stop" à l'étape $k+1$)?
(3) En déduire la stratégie optimale pour Alice, en vue de maximiser son espérance de gain.
Calculer son espérance de gain avec cette stratégie lorsque $M = 2$, puis $M = 3$.
(4) Alice joue également parfois à une variante de ce jeu, où le jeu continue toujours lorsque $X_k = X_{k-1}$. Refaire les questions (2) et (3) avec cette variante.

(1) Déterminer un équivalent lorsque n tend vers l'infini de
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ .$$
(2) Déterminer un équivalent lorsque n tend vers l'infini de
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)} \ .$$
(3) En fonction de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la série de terme général $(k^{\alpha}(\ln(k))^{\beta})_{k \geqslant 2}$ converge-t-elle?

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même distribution. On suppose que pour tout entier i,

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_i\right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\varepsilon_i^2\right] = 1 \ .$$

On définit alors la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $X_0 = 0$ et la relation de récurrence

$$X_{k+1} = aX_k + \varepsilon_{k+1} \ .$$

On observe $Y_1, \ldots, Y_n$ avec $Y_i = \mu + X_i$ pour un réel μ inconnu. On s'intéresse à l'estimation de μ.

(1) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$X_n = \varepsilon_n + a\varepsilon_{n-1} + a^2\varepsilon_{n-2} + \cdots + a^{n-1}\varepsilon_1 \ .$$

(2) Soit

$$\widehat{\mu}_n^{(1)} = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \ .$$

Est-ce un estimateur sans biais de μ?

(3) Calculer la variance de $\widehat{\mu}_n^{(1)}$ en fonction de n.

(4) On propose l'estimateur

$$\widehat{\mu}_n^{(2)} = \frac{Y_1 + \cdots + Y_{n-1}}{n+1} + \frac{2Y_n}{n+1} \ .$$

Est-ce un estimateur sans biais de μ? Calculer sa variance.

(5) Plus généralement, soit

$$\widehat{\mu}_n(c_1, \ldots, c_n) = c_1Y_1 + \cdots + c_nY_n \ .$$

À quelle condition sur les c_i est-ce un estimateur sans biais de μ?
En supposant $n = 2$, déterminer c_1, c_2 tels que $\widehat{\mu}_n(c_1, c_2)$ est sans biais et de variance minimale.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues (sauf éventuellement en un nombre fini de points), et telles qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash[a, b]$, $f(x) = 0$.
Pour tout $f, g \in \mathcal{E}$, on définit la fonction $f \star g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \ .$$

(1) Soit f_0 la fonction qui vaut $1/2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et 0 ailleurs. Calculer $f_1 = f_0 \star f_0$, puis $f_2 = f_1 \star f_0$.
(2) Montrer que pour tout $f, g \in \mathcal{E}$, $f \star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash[a, b]$, $(f \star g)(x) = 0$.
(3) Soit $f, g \in \mathcal{E}$ telles que g est continûment dérivable, montrer que $f \star g$ est continue.
Indication: Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que $|(f \star g)(x) - (f \star g)(y)| \leqslant C\,|x - y|$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$ à préciser.

Parmi les 72 parlementaires européens représentant la France, on compte 33 femmes. En Finlande, 8 parlementaires européens sur 13 sont des femmes. En Lettonie, 3 sur 8 sont des femmes. Dans chacun de ces cas, peut-on parler de parité?

On modélise la situation comme suit: $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, égales à F avec probabilité $p \in]0,1[$, à H avec probabilité $1-p$. À partir de l'observation de $X_1, \dots, X_n$, on cherche à estimer p.

(1) Faire le lien entre la question initiale et la modélisation mathématique proposée.
(2) On note $F_n = \text{Card}\{i \in \{1, \dots, n\} \,/\, X_i = F\}$. Quelle est la loi de F_n ?
(3) Proposer un estimateur de p. Calculer son biais, sa variance. Préciser son comportement lorsque n tend vers l'infini.
(4) Construire un intervalle de confiance (asymptotique) pour p de probabilité de couverture $1-\alpha$, avec $\alpha \in]0,1[$.
À l'aide du tableau ci-dessous, que dire du niveau de parité aux élections européennes de 2009, en fonction des pays? On pourra utiliser une probabilité de couverture de 0.05, et on rappelle que si Z suit une loi normale centrée réduite, alors $\mathbb{P}(|Z| \geqslant 1.96) \approx 0.05$.

Pays	Finlande	Suède	Pays-Bas	France	Lettonie	Royaume-Uni
Nombre total d'élus	13	18	25	72	8	72
Nombre de femmes élues	8	10	12	33	3	24
Pourcentage de femmes	61,5	55,6	48	45,8	37,5	33,3

Source: Observatoire de la parité entre les femmes et les hommes - Fondation Robert Schuman, 15/07/09

Soit $n \geqslant 1$ un entier, $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = P + P'$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, et $\varphi_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi_n(P) = \varphi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

(1) Montrer que φ_n est une application linéaire, et écrire sa matrice A_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
(2) Déterminer le noyau et l'image de φ_n.
La matrice A_n est-elle inversible? Si oui, calculer son inverse.
(3) Déterminer le noyau et l'image de φ. L'application φ est-elle un isomorphisme?
(4) Soit $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par $\psi(P) = P' + P''$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
Est-elle surjective? Est-ce un isomorphisme?

On considère, pour tout $n \geqslant 1$, les fonctions f_n et g_n définies sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = \frac{\sin(2nx)\cos(x)}{\sin(x)} \ .$$

(1) Montrer que les intégrales $\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt$ et $\int_0^{\pi/2} g_n(t)dt$ sont convergentes.

(2) Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a

$$\frac{x}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant x \ .$$

(3) On définit, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \int_0^{\pi/2} f_n(t)dt \ .$$

Déduire de la question précédente que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(4) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et de v_n, où

$$v_n = \int_0^{\pi/2} g_n(t)dt \ .$$

(5) Déterminer une formule de récurrence pour v_n. En déduire un équivalent de u_n quand $n \to \infty$.

Soit $K, n \geqslant 1$ des entiers et $X_0, X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \ldots, K\}$.

(1) Soit $S \subset \{1, \ldots, K\}$. Donner la valeur de $\mathbb{P}(X_0 \in S)$ en fonction de $\mathrm{Card}(S)$.

(2) Soit $z \in \{1, \ldots, K\}$. Calculer $\mathbb{P}(X_1 \neq z, \ldots, X_n \neq z)$.

(3) Calculer $\mathbb{P}(X_0 \notin \{X_1, \ldots, X_n\})$ de deux manières pour en déduire une expression de $\mathbb{E}[\mathrm{Card}\{X_1, \ldots, X_n\}]$.

(4) Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}[\mathrm{Card}\{X_1, \ldots, X_n\}]$ lorsque:

  (i) K est fixe et $n \to +\infty$,

  (ii) n est fixe et $K \to +\infty$,

  (iii) $n = K \to +\infty$.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $P' \in \mathbb{R}[X]$ sa dérivée.

(1) Déterminer
$$\left\{ P \in \mathbb{R}[X] \,/\, P = P'\left(\frac{X^2}{2}\right) \right\} \ .$$

(2) Déterminer
$$\left\{ P \in \mathbb{R}[X] \,/\, P = \left(P'\right)^3 \right\} \ .$$

(3) Déterminer
$$\left\{ P \in \mathbb{R}[X] \,/\, P = \left(P'\right)^2 \right\} \ .$$

(4) Déterminer
$$\left\{ P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \exists Q \in \mathbb{R}[X] \,,\, P = P' \circ Q \right\} \ .$$

(5) Déterminer
$$\left\{ P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \exists Q \in \mathbb{R}[X] \,,\, P = Q \circ P' \right\} \ .$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée, et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \ .$$

(1) Montrer, pour tout entier $n \geqslant 0$, la convergence de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} dx \ .$$

(2) Justifier que, pour tout $M > 0$, on a

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+u^2} du + \int_0^{M} \frac{f(a_n u) - f(0)}{1+u^2} du + \int_M^{+\infty} \frac{f(a_n u) - f(0)}{1+u^2} du \ .$$

(3) En déduire que I_n converge lorsque n tend vers l'infini vers une limite I_∞ que l'on calculera.

Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé. Pour tous $k, \ell \geqslant 1$ entiers, on note $\mathcal{M}_{k,\ell}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels à k lignes et ℓ colonnes et $\mathcal{M}_\ell(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{\ell,\ell}(\mathbb{R})$.
Pour tout entier $k \geqslant 1$, on définit

$$E_k = \{\, MN \,/\, M \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})\,,\, N \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})\,\} \quad .$$

(1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{R}_1$ des valeurs possibles pour le rang de $P \in E_1$.
(2) En fonction de n, E_1 est-il un espace vectoriel?
(3) Soit $r \in \mathcal{R}_1$. Toute matrice de rang r appartient-elle à E_1 ?
(4) Généraliser les trois questions précédentes en remplaçant E_1 par E_k et $\mathcal{R}_1$ par $\mathcal{R}_k$, avec $k \geqslant 2$.
(5) Pour tous $j, k \geqslant 1$ entiers, soit

$$F_{j,k} = \{\, M_1 + M_2 + \cdots + M_j \,/\, M_1, \ldots, M_j \in E_k \,\} \quad .$$

Pour quels couples (j, k) a-t-on $F_{j,k} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Pour quels couples (j, k) l'ensemble $F_{j,k}$ est-il un espace vectoriel?

Soient $n, k \geqslant 1$ des entiers. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et pour tout entier $j \geqslant 0$, $\mathbb{R}_j[X]$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à j.

(1) Soit $\varphi_k : \mathbb{R}_k[X] \to \mathbb{R}^{k+1}$ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_k[X]\,, \quad \varphi_k(P) = (P(0), P'(0), \ldots, P^{(k)}(0)) \ ,$$

où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k du polynôme P. Montrer que φ_k est une application linéaire, puis déterminer son noyau et son image.

(2) L'application φ_k est-elle un isomorphisme? Si c'est possible, déterminer son inverse.

(3) Soit $\psi_{k,n} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{k+1}$ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\,, \quad \psi_{k,n}(P) = (P(0), P(1), \ldots, P(k)) \ .$$

Montrer que $\psi_{k,n}$ est une application linéaire, puis déterminer son noyau et son image, en fonction de k et n. Est-ce un isomorphisme?

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(1) Montrer que pour tous $x, y \geqslant 0$, $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$. En déduire que sur

$$\mathcal{E}_2 = \left\{ (x, y) \in [0, +\infty[^2 \,/\, x + y = 1 \right\} \quad ,$$

f_2 atteint son maximum en un point que l'on déterminera.

(2) Montrer que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in [0, +\infty[^n$,

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f_n\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, x_3, \ldots, x_n \right) \quad .$$

On définit l'ensemble

$$\mathcal{E}_n = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in [0, +\infty[^n \,/\, x_1 + \cdots + x_n = 1 \} \quad .$$

(3) On suppose, dans cette question seulement, que $n = 2^k$ pour un entier $k \geqslant 1$. À l'aide de la question (2), montrer que f_n atteint son maximum sur $\mathcal{E}_n$ en un point que l'on déterminera.

(4) En déduire une inégalité entre $|x_1 \cdots x_n|^{1/n}$ et $(|x_1| + \cdots + |x_n|)/n$ pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Indication: On pourra commencer par considérer le cas où $n = 2^k$ *pour un entier* $k \geqslant 1$*, avant de généraliser l'inégalité.*