Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

(1) Calculer l'espérance et la variance de X.
(2) Déterminer la densité de $Y = \ln(X)$.
(3) Déterminer la densité de $Z = \exp(X)$.
(4) Selon la valeur de λ, Y et Z admettent-elles une espérance finie? une variance finie? Lorsque c'est possible, calculer l'espérance et la variance de Z.

Soit $n \geqslant 0$ un entier et soit E_n l'ensemble des fonctions f de la forme

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$$

avec $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

(1) En calculant de deux manières la partie réelle et la partie imaginaire de $e^{i(\theta+\theta')}$ pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(\theta+\theta')$ et $\sin(\theta+\theta')$ à l'aide de $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\sin\theta$ et $\sin\theta'$.

(2) Calculer, pour tous j, k entiers, $\int_0^{2\pi} \cos(jx)\cos(kx)dx$, $\int_0^{2\pi} \cos(jx)\sin(kx)dx$ et $\int_0^{2\pi} \sin(jx)\sin(kx)dx$.

(3) Montrer que E_n est un espace vectoriel, quelle est sa dimension?
Indication: On pourra chercher à calculer $\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx$ *et* $\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx$ *pour* $f \in E_n$ *et* $k \in \mathbb{N}$.

(4) On suppose dans cette question que $n = 1$. Étudier, pour tous réels a_0, a_1 et b_1, la fonction $f(x) = a_0 + a_1\cos(x) + b_1\sin(x)$ sur $[0, 2\pi]$. Montrer que s'il existe trois réels distincts $0 \leqslant a < b < c < 2\pi$ tels que $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

(5) On suppose maintenant n quelconque. Montrer que, s'il existe $(2n+1)$ réels distincts x dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ tels que $f(x) = 0$, alors f est la fonction nulle.
Indication: On pourra admettre dans cette question que tout polynôme de $\mathbb{C}_{2n}[X]$ *possédant* $(2n+1)$ *racines distinctes dans* $\mathbb{C}$ *est identiquement nul.*

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Une proportion p d'une population est infectée par un virus. On dispose d'un test de contamination possédant les caractéristiques suivantes:

- Si un individu est infecté, le test est positif avec une probabilité 0.99.
- Si un individu est sain, le test positif avec probabilité 0.03.

(1) Un individu choisi au hasard dans la population est contrôlé positif au test. Donner la probabilité $f(p)$ qu'il soit infecté par le virus.

(2) Etudier les variations et tracer la fonction $p \to f(p)$ (on précisera son domaine de définition).

(3) Un test est déclaré fiable si la probabilité d'être malade pour un individu testé positif est supérieure à 95%.
  (a) Le test est-il fiable pour $p = 0.10$?
  (b) Pour quelles valeurs de p le test est-il fiable?

Pour tout $\theta = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \vdots \\ \theta_\ell \end{pmatrix}$ vecteur colonne dans $\mathbb{R}^\ell$, on définit le vecteur ligne $\theta^T = (\theta_0, \ldots, \theta_\ell)$. Ainsi, pour tout $\theta' = \begin{pmatrix} \theta'_0 \\ \vdots \\ \theta'_\ell \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^{\ell+1}$, $\theta^T\theta'$ est le réel $\sum_{i=0}^{\ell} \theta_i\theta'_i$ et $\theta'\theta^T$ est la matrice dont la coordonnée (i,j) est égale à $\theta'_i\theta_j$.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction et soient $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant 1$ n points distincts de $[0,1]$. On souhaite construire une approximation de f en n'utilisant que ses valeurs aux points x_i. Pour cela, on définit les vecteurs

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad U(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \frac{u^\ell}{\ell!} \end{pmatrix} .$$

On cherche à déterminer, pour tout $x \in [0,1]$, le vecteur $\theta \in \mathbb{R}^{\ell+1}$ minimisant la fonction

$$Q_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\ell+1} & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - \theta^T U\left(x_i - x\right) \right)^2 \end{array}$$

(1) Calculer, pour tout vecteur $\theta \in \mathbb{R}^{\ell+1}$, $\theta^T U\left(x_i - x\right)$.

(2) On suppose que f est un polynôme de degré inférieur à ℓ. Montrer que Q_x est minimale pour $\theta = \theta(x)$ où

$$\theta(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ \vdots \\ f^{(\ell)}(x) \end{pmatrix}$$

et donner la valeur de $\min_{\theta \in \mathbb{R}^n} Q_x(\theta)$.

(3) On retourne au cas d'une fonction f générale et on suppose maintenant $\ell = 1$. Trouver un système de deux équations que doit vérifier $\theta = (\theta_0, \theta_1)$ pour minimiser Q_x.

(4) On définit

$$B = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}(x_i - x) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - x) & \sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2. \end{pmatrix}$$

et le vecteur

$$a = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) U\left(x_i - x\right) \ .$$

Reformuler le système de la question précédente sous une forme matricielle faisant intervenir a et B. En déduire une condition suffisante sur B pour que Q_x admette un unique minimum.

(5) Démontrer que la condition précédente est toujours vérifiée si $n \geqslant 2$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Soit n un entier et soit $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des réels distincts deux à deux. Soit $P_1, \ldots, P_{n+1}$ les polynômes définis par

$$\forall i \in \{1, \ldots, n+1\} , \qquad P_i(X) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} (X - a_j) \ .$$

(1) Montrer que $(P_1, \ldots, P_{n+1})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) Soient $b_1, \ldots, b_{n+1}$ des réels. Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, $Q(a_i) = b_i$. Ce polynôme est il unique?

(3) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ admettant $n+1$ racines distinctes. Montrer que P est le polynôme nul.

(4) Soit $(Q_1, \ldots, Q_{n+1})$ une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des réels distincts. Monter que la matrice M de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, de terme général $M_{i,j} = Q_i(a_j)$ est inversible. Discuter la réciproque.

(1) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n - \frac{1}{2} \leqslant 2\pi k - \frac{\pi}{2} < n + \frac{1}{2} \ .$$

(2) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $\sin(n) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un irrationnel. On considère l'application $F : \{1, \ldots, n+1\} \to [0,1]$; $q \mapsto qx - \lfloor qx \rfloor$. Montrer qu'il existe q_1 et q_2 distincts tels que

$$|F(q_1) - F(q_2)| \leqslant \frac{1}{n}$$

Indication : On pourra considérer une partition de $[0,1]$ *en* n *intervalles de taille* n^{-1}.

(4) Déduire de la question précédente qu'il existe un q_0 tel que

$$\min(F(q_0), 1 - F(q_0)) \leqslant \frac{1}{n}$$

(5) Montrer qu'il existe une suite $(p_n, q_n)_{n \geqslant 1}$ de couples d'entiers telle que $q_n \to \infty$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n(q_n - 1)} \ .$$

(6) Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n \sin n}$ diverge quand $n \to \infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

On appelle graphe fini G tout couple $G = (S, A)$ formé d'un ensemble fini de sommets $S = \{1, \ldots, p\}$ et d'un ensemble d'arrêtes A formé de paires de points $\{i, j\}$ avec $i \neq j$. A tout graphe $G = (S, A)$, on associe sa matrice d'adjacence $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{M}_{p \times p}(\mathbb{R})$ telle que $m_{i,j} = 1$ si $\{i, j\} \in A$ et $m_{i,j} = 0$ sinon. On représente également un graphe en considérant p points du plan ou de l'espace et en traçant une arrête entre les points des paires de A. Un chemin entre deux sommets a et b est une suite $(x_0, \ldots, x_n)$ de sommets telle que $x_0 = a$, $x_n = b$ et $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\{x_i, x_{i+1}\} \in A$, n est appelé la longuet du chemin. On considère le graphe "triangle" $G = (S, A)$ où $S = \{1, 2, 3\}$ et $A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.

(1) Donner la matrice d'adjacence $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ de G.

(2) Montrer que $m_{a,b}$ est égal au nombre de chemins de a à b de longueur 1.

(3) Notons $M^2 = (m_{i,j}^{(2)})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$, montrer que $m_{a,b}^{(2)}$ est égal au nombre de chemins de a à b de longueur 2.

(4) Plus généralement, pour tout $n \geqslant 1$, on note $M^n = \left(m_{i,j}^{(n)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$, montrer que $m_{a,b}^{(n)}$ est égal au nombre de chemins de a à b de longueur n.

(5) Calculer le nombre de chemins de a à b de longueur n.

(6) Que dire dans le cas d'un graphe quelconque?

Soit I la suite définie par

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$$

(1) Calculer I_0 et I_1.
(2) Montrer que la suite I converge.
(3) Pour tout $n \geqslant 0$ que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
(4) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$ le produit $I_n I_{n+1}(n+1)$ est constant.
(5) Calculer la limite de I_n, I_{n+1}/I_n et $I_n\sqrt{n}$.
(6) Donner des expressions simples pour I_{2n+1} et I_{2n}, $n \geqslant 0$.
(7) Donner à partir de ce qui précède une suite de nombre rationnels convergeant vers π.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Une usine de téléphones portables fabrique N téléphones chaque jour, où N est une variable de Poisson de paramètre λ. Chaque téléphone a une probabilité p d'être défectueux et une probabilité $1-p$ d'être fonctionnel. L'état de chaque téléphone est indépendant de N et ils sont indépendants entre eux.

(1) Etant donné n et k deux entiers fixés. Donner la probabilité d'obtenir k téléphones défectueux en une journée sachant que n ont été produits.
(2) Donner la probabilité que k téléphones défectueux soient produits en un jour (sous la forme d'une somme sur n).
(3) Montrer que le nombre X de téléphones défectueux fabriqués par jour est une variable de Poisson dont on donnera le paramètre.
(4) Montrer que le nombre Y de téléphones fonctionnels fabriqués par jour est une variable de Poisson dont on donnera le paramètre.
(5) X et Y sont elles des variables indépendantes?

Soit f une fonction C^2 (deux fois dérivable et telle que f'' est une fonction continue) définie sur l'intervalle $[0,1]$ et telle que $f(0)=0$, $f(1)=1$ et $f'(0)=f'(1)=0$. On définit

$$M := \max_{x\in[0,1]} |f''(x)|.$$

(1) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, on a

$$1-M\frac{(1-x)^2}{2} \leqslant f(x) \leqslant M\frac{x^2}{2}.$$

(2) En déduire que nécessairement $M \geqslant 4$.

(3) On suppose que $f''(1/2) < M$, montrer que

$$f(1/2) < \frac{M}{8}.$$

En déduire que $M > 4$.

(4) Montrer que $M > 4$ dans le cas ou $f''(1/2) = M$.

(5) Pour $M > 4$, pouvez vous construire une fonction f qui vérifie $f(0)=0$, $f(1)=1$ et $f'(0)=f'(1)=0$ et $M=\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Soient S et V deux séries définies par

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$
$$V_n := S_n + \frac{1}{n!n}.$$

(1) Montrer que la suite S est croissante et que V est décroissante.
(2) Montrer que S et V convergent vers $e = \exp(1)$.
(3) Soit q un entier naturel. Montrer que pour $n \geqslant n_q$ suffisamment grand l'intervalle $[S_n, V_n]$ ne contient pas de nombres de la forme p/q, $p \geqslant 1$ (on donnera une valeur pour n_q).
(4) Montrer que e est irrationnel.

On donne à 100 personnes un antibiotique pour soigner une infection et à 100 autres, un nouvel antibiotique. Dans le premier groupe, 90 personnes sont guéries et dans le second 85. Le nouveau médicament est-il meilleur que l'ancien?
On propose la modélisation suivante: on note $n = 100$ le nombre d'individus de chaque groupe, $X_i = 1$ si le i-ème individu du groupe 1 est guéri et $X_i = 0$ sinon, $Y_i = 1$ si le i-ème individu du groupe 2 est guéri $Y_i = 0$ sinon. On suppose que $X_1, \ldots, X_n$ sont i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p_1 et $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes de $X_1, \ldots, X_n$, i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p_2.

(1) Reformuler la question initiale dans le modèle.
(2) Proposer un estimateur $\widehat{\delta}$ de $\delta = p_1 - p_2$. Quel est son biais? Sa variance? Préciser son comportement quand $n \to \infty$.
(3) Déterminer un intervalle de confiance asymptotique pour δ de niveau de confiance 95%.
(4) On admet l'inégalité de Tchebycheff

$$\mathbb{P}\left(|Y - \mathbb{E}[Y]| > t\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(Y)}{t^2} .$$

En déduire un intervalle de confiance pour δ de niveau de confiance 95%, valable pour tout $n \geqslant 1$.
(5) Quelle conclusion peut-on tirer sur le nouveau médicament?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Soit f l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $f(P) = Q$ où $Q(X) = P(X+1)$.

(1) Prouver que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser f^{-1}.
(2) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $B = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
(3) Déduire de ce qui précède que A est inversible et préciser A^{-1}.
(4) Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_{n+1}$. On pose :

$$\forall p \in \{0, \dots, n\}\ , \quad b_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_k \ .$$

(a) Déterminer un lien entre les deux vecteurs lignes $(a_0, \dots, a_n)$ et $(b_0, \dots, b_n)$.
(b) En déduire l'expression de a_k en fonction de $(b_0, \dots, b_k)$ pour tout entier $k \in [0, n]$.

Un groupe de quatre individus vit dans la forêt, chacun se déplaçant avec un bidon d'eau. L'eau étant un bien précieux, ils décident de partager leurs réserves d'eau dès que deux d'entre eux se croisent. Autrement dit, si deux individus se rencontrent, et si l'on note a et b leurs réserves d'eau (exprimées en litres) avant la rencontre, ils repartent chacun avec une réserve de $(a+b)/2$. Les rencontres se font aléatoirement, et toujours deux par deux (on néglige les chances que trois individus se croisent simultanément).

On modélise l'évolution des différentes réserves d'eau de la manière suivante. Pour $i \in \{1,2,3,4\}$ et $k \geqslant 0$, on note Z_i^k la réserve d'eau de l'individu i après que k rencontres se sont produites.
Ensuite, pour chaque entier $k \geqslant 1$, on note I_k et J_k les numéros des deux individus qui se rencontrent à l'étape k, et l'on suppose que I_k et J_k sont indépendants entre eux, et indépendants de $(I_\ell, J_\ell)_{\ell \leqslant k-1}$, de loi uniforme sur $\{1,2,3,4\}$. Ceci laisse la possibilité que $I_k = J_k$, auquel cas rien ne se passe.
Sinon, sachant (I_k, J_k), on a $Z_i^{k+1} = Z_i^k$ pour tout $i \in \{1,2,3,4\} \setminus \{I_k, J_k\}$, tandis que

$$Z_{I_k}^{k+1} = Z_{J_k}^{k+1} = \frac{Z_{I_k}^k + Z_{J_k}^k}{2} \quad .$$

Par exemple, une réalisation possible est la suivante:

- $Z^0 = (0.1, 0.3, 0.6, 0.4) = (Z_1^0, Z_2^0, Z_3^0, Z_4^0)$
- $Z^1 = (0.2, 0.2, 0.6, 0.4)$ ($I_1 = 1$ et $J_1 = 2$ se sont rencontrés)
- $Z^2 = (0.2, 0.3, 0.6, 0.3)$ ($I_2 = 2$ et $J_2 = 4$ se sont rencontrés)
- $Z^3 = (0.2, 0.3, 0.6, 0.3)$ ($I_3 = J_3 = 3$, donc aucune rencontre)
- $Z^4 = (0.2, 0.45, 0.45, 0.3)$ ($I_4 = 3$ et $J_4 = 2$ se sont rencontrés)
- ...

(1) Pour quelle(s) valeur(s) de Z^0 la suite Z^k est-elle constante, quelle que soit la suite des rencontres?

(2) Trouver une suite de 4 rencontres telle que $Z^k = Z^4$ pour tout $k \geqslant 4$ quel que soit le choix de Z^0. Quelle est la probabilité ε que cette suite de rencontres se produise?

(3) En déduire que pour tout $k_0 \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(Z^k \text{ est constante à partir du rang } 4k_0) \geqslant 1 - (1-\varepsilon)^{k_0} \quad .$$

(4) La suite $(Z_1^k)_{k \geqslant 0}$ converge-t-elle? Si oui, déterminer sa limite.

(5) Généraliser le raisonnement précédent au cas où le groupe est de taille $n = 2^a$ pour un entier $a \geqslant 1$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

(1) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.
(2) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ converge. On note γ la limite de cette suite.
(3) Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ et $f(0) = 0$, où, pour tout réel y, on note $\lfloor y \rfloor$ l'entier tel que $\lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$. Montrer que $\int_0^1 f(t)dt$ est convergente.
(4) Exprimer $\int_0^1 f(t)dt$ en fonction de γ.

On considère des paramécies se reproduisant dans un milieu avec la règle suivante. A chaque unité de temps $n \in \mathbb{N}$, chaque paramécie peut se diviser en deux avec probabilité p ou mourir avec probabilité $1 - p$. Ces choix sont faits de manière indépendante pour chaque paramécie et indépendamment du passé. On appelle X_n la population à l'instant n

(1) On part d'une population de k individus ($X_0 = k$). Donner la loi du nombre d'individus après une étape, son espérance et sa variance.
(2) Donner l'espérance du nombre d'individus présents après n étapes (on pourra utiliser une récurrence)
(3) On suppose $p < 1/2$
    (a) Donner une borne supérieure sur la probabilité d'avoir au moins un individu vivant après n étapes.
    (b) Soit T le premier n pour lequel $X_n = 0$. Justifier que $T < \infty$ avec probabilité 1 et donner une borne sur l'espérance de T. (on pourra utiliser la formule $E[T] = \sum_{n=1}^{\infty} P[T \geqslant n]$).
(4) On suppose maintenant que $k = 1$, $p = 1/2$. On note α la probabilité d'extinction de la population $\alpha = P(T < \infty)$ Montrer que
$$\alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2}.$$
Conclure.
(5) Que dire pour $k > 1$, $p = 1/2$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et W un supplémentaire. Soit $\pi_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application qui, à tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, $x = x_V + x_W$ avec $x_V \in V$ et $x_W \in W$, associe le vecteur $\pi_V(x) = x_V$.

(1) Montrer que π_V est une application linéaire de noyau W, d'image V et donner sa matrice dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ adaptée à V, W, i.e. telle que $(e_1, \ldots, e_d)$ est une base de V et $(e_{d+1}, \ldots, e_n)$ est une base de W.

(2) Pour tout vecteur $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$, on définit

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad < x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

Montrer que, pour tout vecteur $v \in V$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x - \pi_V(x)\|^2 \leqslant \|x - v\|^2$.

(3) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, si $z \in V$ vérifie

$$\forall v \in V, \qquad < x - z, v - z > \leqslant 0 \ .$$

alors $z = \pi_V(x)$.

Un jeu entre deux joueurs A et B est divisé en parties indépendantes. À chaque partie, la probabilité que A perde est $1-p$ et la probabilité que B perde est p (où $p \in]0,1/2[\cup]1/2,1[$); de plus, le perdant donne 1 euro au gagnant.

Les joueurs A et B possèdent initialement à eux deux une somme totale de N euros ($N \geqslant 2$). Le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs est ruiné. Pour tout entier $k \in [0,N]$, on note a_k la probabilité que le joueur A, ayant initialement une somme de k euros, soit ruiné par la suite.

(1) Préciser a_0 et a_N.

(2) Prouver que : $\forall k \in [1,N-1]$, $a_k = pa_{k+1} + (1-p)a_{k-1}$.

(3) Soit maintenant

$$E = \{(x_0,\dots,x_N),\ \text{tels que } \forall k \in [1,N-1],\ x_k = px_{k+1} + (1-p)x_{k-1}\} \quad .$$

Montrer que E est un espace vectoriel et donner sa dimension.
Indication: On pourra étudier l'application $E \to \mathbb{R}^2$, $(x_0,x_1,\dots,x_N) \mapsto (x_0,x_1)$.

(4) Démontrer que :

$$\forall k \in [0,N]\,, \quad a_k = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1} \quad .$$

Indication: On pourra montrer que le vecteur $(a_0,\dots,a_N)$ *ainsi défini appartient à* E *et étudier l'application* $E \to \mathbb{R}^2$, $(x_0,x_1,\dots,x_N) \mapsto (x_0,x_N)$.

(5) On suppose désormais que le joueur B est infiniment riche et que le joueur A possède une somme initiale de k euro(s). Démontrer que la probabilité a_k que le joueur A se ruine vaut 1 si $p < 1/2$ et vaut $\left(\frac{1-p}{p}\right)^k$ si $p > 1/2$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à trois. Soit f l'application qui à tout polynôme P de E associe le polynôme $f(P) = Q$ où $Q(X) = P(X+1) + P(X)$.

(1) Prouver que f est un endomorphisme de E.
(2) Déterminer la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de E.
(3) Prouver que f est un isomorphisme.
(4) Déterminer la matrice de f^{-1} dans $\mathcal{B}$.
(5) Soit $Q(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ un élément de E et P un polynôme tel que $Q = f(P)$.
   (a) Pour tout entier naturel n non nul, on pose :
$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k Q(k) \ .$$
   Exprimer simplement $S(n)$ en fonction de $P(n+1)$ et $P(0)$.
   (b) En déduire l'expression de $S(n)$ en fonction n et de (a_0, a_1, a_2, a_3).

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n une variable aléatoire de loi binômiale de paramètres $(n, 1/2)$.

(1) Donner la valeur de $\mathbb{P}(X_n = k)$ pour tout entier k, puis l'espérance et la variance de X_n.

(2) Montrer que, si n est pair,
$$\frac{\mathbb{P}(X_n = n/2)}{\mathbb{P}(X_n = n/2 + a)} = \prod_{k=1}^{a} \left(1 + \frac{a}{\frac{n}{2} - k + 1}\right)$$
pour $a = 1$, $a = 2$, puis $a \in \{3, \dots, n/2\}$.

(3) En déduire que, si n est pair,
$$\forall a \in \{0, \dots, n/4\} \qquad 1 \leqslant \frac{\mathbb{P}(X_n = n/2)}{\mathbb{P}(X_n = n/2 + a)} \leqslant \exp\left(C \frac{a^2}{n}\right) \quad ,$$
pour une certaine constante numérique C à déterminer.

(4) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\frac{n}{2} - \varepsilon\sqrt{n} \leqslant X_n \leqslant \frac{n}{2} + \varepsilon\sqrt{n}\right)$$
converge lorsque n tend vers l'infini et déterminer sa limite.

(5) Montrer que
$$\sqrt{2n}\,\mathbb{P}\left(X_{2n} = n\right)$$
converge lorsque n tend vers l'infini et déterminer sa limite.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

On définit les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer A^2, et A^3.
(2) Calculer la valeur de J^2, J^3 puis J^n pour tout entier n.
(3) En faisant une récurrence sur n, montrer que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) Donner une preuve plus directe de l'identité précédente en utilisant le binôme de Newton.

Pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, on définit ses coefficients de Fourrier

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \theta_{2k}(f) = \int_0^1 f(x)\cos(2k\pi x)dx, \qquad \theta_{2k-1}(f) = \int_0^1 f(x)\sin(2k\pi x)dx \ .$$

On admet la relation de Parseval qui affirme que

$$\int_0^1 f^2(x)dx = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\theta_k^2(f) \ .$$

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 g(x)dx = 0$, et pour tout $\ell \in \{0,\ldots,k\}$, $g^{(\ell)}(0) = g^{(\ell)}(1)$. On suppose qu'on ne peut pas observer ses coefficients de Fourier $\theta_k(g)$ directement mais seulement

$$Y_k = \theta_k(g) + \varepsilon_k \qquad k = 1,\ldots$$

ou les $(\varepsilon_k)_{k=1,\ldots}$ sont des variables aléatoires i.i.d. de moyenne nulle et de variance σ^2. On souhaite reconstruire au mieux le signal g à partir des variables Y_k. On définit pour cela les fonctions

$$\widehat{g}_\ell(x) = 2\sum_{k=1}^{\ell}\left(Y_{2k}\cos(2k\pi x) + Y_{2k-1}\sin(2k\pi x)\right) \ .$$

(1) A l'aide de la formule de De Moivre, exprimer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.

(2) En déduire une expression de $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\cos(b)$ et $\sin(a)\sin(b)$ en fonction de $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$.

(3) Calculer les coefficients de Fourier $\theta_j(\cos(2\ell\pi x))$ et $\theta_j(\sin(2\ell\pi x))$ pour tout entier $\ell \geqslant 1$ et $j \geqslant 1$.

(4) Calculer les coefficients de Fourier $\theta_j(\widehat{g}_\ell)$ et $\theta_j(g - \widehat{g}_\ell)$ pour tout entier $j \geqslant 0$.

(5) En déduire l'égalité suivante (on appelle valeur de risque le membre de gauche)

$$\mathbb{E}\left(\int_0^1 (g(x) - \widehat{g}_\ell(x))^2 dx\right) = 2\sigma^2\ell + 2\sum_{j>2\ell}\theta_j^2(g) \ .$$

(6) Montrer que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(1)$ et $f'(0) = f'(1)$,

$$\forall j \geqslant 1, \qquad \theta_{2j}(f') = 2j\pi\theta_{2j-1}(f), \qquad \theta_{2j-1}(f') = -2j\pi\theta_{2j}(f) \ .$$

(7) Montrer la majoration suivante

$$\sum_{j>2\ell}\theta_j^2(g) \leqslant \frac{\int_0^1 (g^{(k)}(x))^2 dx}{(2\pi\ell)^k} \ .$$

(8) Comment proposez-vous de choisir ℓ? Donner, pour ce choix de ℓ, une majoration du risque $\mathbb{E}\left(\int_0^1 (g(x) - \widehat{g}_\ell(x))^2 dx\right)$ en fonction de k, σ^2 et $\int_0^1 (g^{(k)}(x))^2 dx$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Pour tout entier $n > 0$, on définit le polynôme P_n par

$$P_n = X^n + X^{n-1} + \cdots + X^2 + X - 1 = (\sum_{k=1}^{n} X^k) - 1$$

(1) Montrer que le polynôme P_n possède une unique racine réelle positive (on la notera x_n).
(2) Montrer que $P_{n+1}(x_n) > 0$ et en déduire que la suite x_n est décroissante.
(3) Montrer que la suite x_n est convergente on appelle l sa limite.
(4) En utilisant l'identité $(x_n - 1)P_n(x_n) = 0$, déterminer la valeur de la limite l.

Soit n un entier. On appelle permutation de $\{1,\dots,n\}$ une application $\pi : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ telle que chaque entier admette un unique antécédent. On dit que k est un point fixe de π si $\pi(k) = k$. Soit $p \leqslant n$ un autre entier. On note $N(n,p)$ le nombre de permutations de $\{1,\dots,n\}$ ayant exactement p points fixes et $D(n) = N(n,0)$. Pour tout $x \in [0,1[$, on note

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n \quad .$$

(1) On se place dans cette question seulement dans le cas où $n = 3$. Donner le nombre de permutations de $\{1,2,3\}$ et le nombre de permutations ayant exactement 0, 1, 2 et 3 points fixes.

(2) On retourne pour la suite de l'exercice dans le cas ou n est un entier quelconque. Montrer que $N(n,p) = \binom{n}{p} D(n-p)$ et que $\sum_{p=0}^{n} N(n,p) = n!$.

(3) Montrer que, pour tout $0 \leqslant x < 1$, la série $f(x)$ est convergente.

(4) Montrer que, pour tout $0 \leqslant x < 1$,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{D(\ell)}{\ell!} x^\ell\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad .$$

Indication: on utilisera le fait que, lorsque les séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *et* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ *sont bien définies, alors*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \qquad \textit{avec} \qquad c_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell} \quad .$$

(5) En déduire que

$$\forall x \in [0,1[, \qquad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} \quad .$$

(6) On admet dans cette question que la dérivée n-ième de f en 0 vaut $D(n)$. On rappelle que, si g et h sont des fonctions n-fois dérivables, alors le produit gh est n-fois dérivable et la dérivée n-ième est donnée par

$$(gh)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)} \quad .$$

En déduire la valeur de $D(n)$, puis celle de $N(n,p)$.

(7) Déterminer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} N(n,p)$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Deux candidats nommés A et B, doivent passer un test par QCM comprenant 20 questions. Pour chaque question, les candidats ont le choix entre deux réponses: une bonne et une mauvaise. Les règles de notations sont les suivantes: une bonne réponse vaut 1 point et une mauvaise -1 point, une question laissée sans réponse vaut 0 point. Les candidats sont reçus s'ils obtiennent plus de dix points.

(1) Le candidat A connait (avec certitude) les réponses aux 9 premières questions mais n'a aucune idée de la réponse aux 11 questions restantes. Il décide de répondre au hasard à $k \geqslant 1$ questions parmi les 11 restantes, (celles numérotées de 10 à $9+k$). Nous allons essayer de déterminer quelle valeur de k maximise ses chances de réussite.
   (a) Donner la probabilité que A soit reçu si $k = 1$, $k = 2$.
   (b) Donner la probabilité que A soit reçu (comme fonction de k) pour k entre 3 et 11. (On distinguera selon la parité de k).
   (c) En déduire la meilleure stratégie pour le candidat A ainsi que sa probabilité de réussite au concours.

(2) Le candidat B connait (avec certitude) les réponses aux 8 premières questions. Il opte pour une stratégie similaire à celle de A, en répondant à $m \geqslant 2$ réponses parmi les 12 restantes.
   (a) Donner la probabilité que B soit reçu si $m = 2$, $m = 3$.
   (b) Donner la probabilité que B soit reçu en fonction de m pour m entre 4 et 12.
   (c) En déduire la meilleure stratégie pour le candidat B.

Pour tout vecteur z de $\mathbb{R}^n$, on définit

$$\|z\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ .$$

On se donne $y \in \mathbb{R}^n$ et $X = (x_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant 3}$ une matrice à n lignes et 3 colonnes telle que

$$\forall j \in \{1,2,3\}, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{i,j}^2 = n \ ,$$

$$\forall j \neq j' \in \{1,2,3\}, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{i,j}x_{i,j'} = 0 \ .$$

(1) Montrer que, pour tout vecteur z, $\|z\|^2 = z^T z$, où, pour tout vecteur colonne $z \in \mathbb{R}^n$, z^T est le vecteur ligne $(z_1, \ldots, z_n)$.
(2) Montrer que $(Xf)^T = f^T X^T$, ou X^T est la matrice à 3 lignes et n colonnes dont le coefficient de la ligne i et colonne j est donné par $x_{j,i}$.
(3) Montrer que $X^T X = nI_3$.
(4) Montrer que la fonction $f \mapsto \|y - Xf\|^2$ admet un unique minimum f^*, donné par

$$f^* = \frac{1}{n} X^T y \ .$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

(1) Justifier que la matrice A suivante est diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Donner ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

(2) Pour tout vecteur x et y de $\mathbb{R}^3$, on définit

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \ .$$

Montrer que, si x et y sont deux vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes, alors $< x, y >= 0$.

(3) Pour toute matrice $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$, on définit la matrice $P^T = (q_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ telle que, pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, $q_{i,j} = p_{j,i}$. Exprimer la condition $P^T P = I$ en fonction des quantités $(< P_j, P_k >)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$, ou $P_j = \begin{pmatrix} p_{1,j} \\ p_{2,j} \\ p_{3,j} \end{pmatrix}$.

(4) Déterminer une matrice P telle que $P^T A P$ soit diagonale.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Pour tout réel $a \geqslant 0$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt \ .$$

(1) Calculer $N_{1/2}\left(2X^2 - 1\right)$.

(2) Montrer qu'il existe une constante C telles que pour tout a et b dans $[0, 1]$, et pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$N_a(P) \leqslant C N_b(P) \ .$$

(3) Montrer que, si $a < b$ et $b > 1$, il existe une suite $(P_n)_{n \geqslant 1}$ de polynômes telle que, quand $n \to +\infty$

$$\frac{N_a(P_n)}{N_b(P_n)} \to 0 \ .$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Soit f une fonction infiniment dérivable définie sur sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, et $f'(0) = 0$. On définit la fonction g sur $[0, \infty)$ par

$$\begin{cases} g(0) & = 0 \\ g(x) & = \frac{f(x)}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

(1) Montrer que la fonction g est dérivable sur $(0, \infty)$ et donner une expression de g' en fonction de f, f' et x.
(2) Montrer que la fonction g est continue en 0.
(3) Montrer que la fonction g est dérivable à droite en zéro et donner l'expression de sa dérivée.
(4) On suppose qu'il existe un a tel que $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un point du graphe de f (hors de l'origine) ou la tangente passe par l'origine du repère.

On définit les polynômes suivants

$$P_1(X) := X, \quad P_2(X) := X^2 - 2, \quad P_3(X) := X^3 - 3X.$$

et f la fonction $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ définie sur $\mathbb{C}^*$.

(1) Donner une expression simple de $P_i(f(z))$ pour $i = 1, 2, 3$.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ montrer l'existence d'un polynôme Q_n dans $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$

$$Q_n(f(z)) := f(z^n).$$

(3) Donner les racines de Q_n et en déduire une factorisation de Q_n dans $\mathbb{R}$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

On introduit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1. \end{pmatrix}$$

(1) Calculer A^2.
(2) Montrer qu'il existe un réel x tel que $B^2 = xB$.
(3) Montrer par récurrence que A s'écrit

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1 + a_n \end{pmatrix}$$

pour une certaine suite a_n (on donnera la valeur de a_1 et une définition récursive de a_n).
(4) Calculer la valeur de a_n pour tout n et en déduire l'expression de A^n.

Soient p et q des réels positifs tels que $1/p+1/q = 1$. Soient f et g deux fonctions continues $[0,1] \to \mathbb{R}_+$. Le but de l'exercice est de démontrer l'inégalité de Hölder:

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \leqslant \left(\int_0^1 f(x)^p dx\right)^{1/p} \left(\int_0^1 g(x)^q dx\right)^{1/q} \quad .$$

(1) Montrer que, pour tous réels a et b positifs,

$$a^{1/p}b^{1/q} \leqslant \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \quad .$$

Indication : On pourra, en fixant x et b, étudier la fonction $a \mapsto a^x b^{1-x} - xa - (1-x)b$.

(2) En déduire l'inégalité de Minkowski

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \leqslant \frac{1}{p}\int_0^1 f(x)^p dx + \frac{1}{q}\int_0^1 g(x)^q dx \quad .$$

(3) Démontrer l'inégalité de Hölder.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Vous êtes encouragé à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.