MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ÉCRIT

Igor Kortchemski, Matthieu Lerasle

Coefficient : 3 **Durée** : 4 heures **Calculatrice interdite**

Commentaires généraux

Structure du sujet. Le sujet était composé de trois exercices indépendants permettant d'aborder un maximum de notions au programme du concours. Chaque exercice proposait aux candidats des questions de difficultés variées. Dans le détail, l'exercice 1 était un exercice d'analyse couvrant les grands thèmes d'analyse réelle (suites, séries, dérivation et intégration de fonctions à une variable réelle). Le deuxième exercice, centré sur l'étude de la trace d'une matrice, permettait de jauger la maîtrise des candidats en algèbre linéaire (espaces vectoriels, applications linéaires, matrices, théorème du rang). Enfin, l'exercice 3 était un long exercice de probabilités découpé en trois parties. La première partie comportait des questions classiques, mais les autres étaient plus originales : la seconde partie s'achevait sur des questions liées aux phénomènes de concentration de la mesure, tandis que la dernière partie proposait d'étudier quelques propriétés de sommes de variables aléatoires comportant un nombre aléatoire de termes.

Bilan général. Le sujet a permis non seulement de départager les meilleurs candidats, mais aussi de classer avec succès les copies plus modestes. Il semble avoir bien fonctionné grâce à la progressivité de chacun des exercices, qui commençaient tous par des questions simples et s'achevaient par des questions bien plus difficiles.

Comme chaque année, nous avons eu la satisfaction de voir de nombreuses excellentes copies aborder avec succès un grand nombre de questions sur tous les thèmes du programmes. Ces excellents candidats seront à coup sûr de brillants élèves en mathématiques dans les écoles de la banque.

Ce bon constat général ne doit cependant pas complètement masquer la faiblesse des candidats les plus modestes puisque, cette année aussi, plus de 20% des copies ont reçu une note inférieure à 4/20.

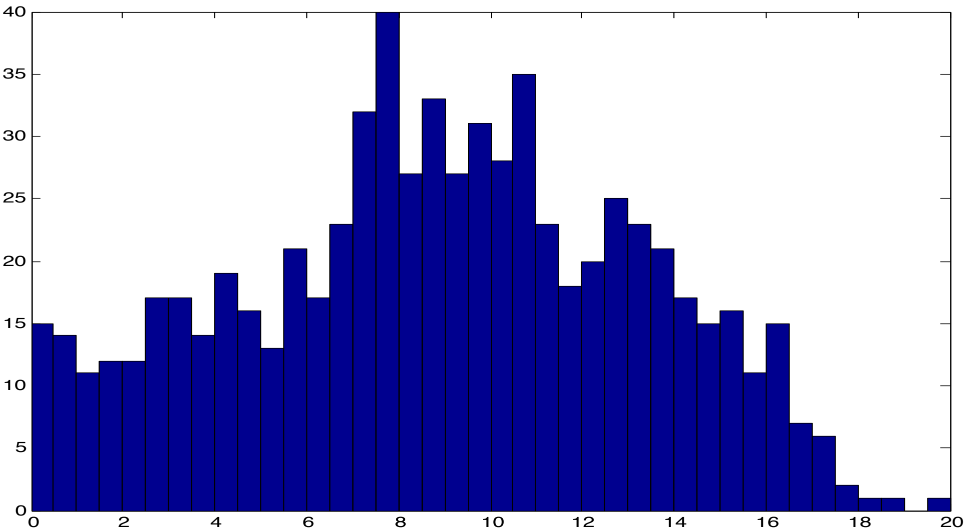

Figure 1. Histogrammes des notes de l'écrit.

Difficulté du sujet. Lors de sa conception, nous avions porté une attention particulière à la progressivité du sujet. Il est ainsi plus délicat cette année de classer les questions par "catégorie", la différence entre deux difficultés étant souvent moins grande que la variabilité au sein d'une même catégorie. Néanmoins, le regroupement suivant donne une idée de la cartographie du sujet.

(1) Questions de cours, calculs numériques élémentaires, ou combinaison des deux : I.(1)-(3), II.(1)-(3b)-(5), III.(1)-(2)-(4)-(6)-(8). En les résolvant intégralement, on obtenait 12,5/20. En faisant la moitié de ces questions, on obtenait 9/20 (le barême n'est pas linéaire, les premiers points étant plus faciles à obtenir).

(2) Questions d'application du cours classiques, ou demandant des calculs légèrement plus complexes ou abstraits : I.(2)-(4)-(5), II.(2)-(3a)-(6), III.(3)-(5)-(9)-(10) En résolvant intégralement les questions de niveau 1–2, on obtenait 17/20. En faisant la moitié des questions de niveau 1–2, on obtenait 12,5/20.

(3) Raisonnements courts mais non classiques, ou questions reposant sur la résolution correcte de questions les précédant : I.(6)-(7), II.(3c)-(7a)-(7b), III.(11)-(13)-(15)-(16)-(18)-(19)-(21). En résolvant intégralement les questions de niveau 1–3, on obtenait 19.5/20. En faisant toutes les questions de niveau 1 et la moitié des questions de niveau 2–3, on obtenait 17/20.

(4) Raisonnements plus fins et questions difficiles : I.(8)-(9), II.(8)-(9), III.(12)-(14)-(17)-(20)-(22)-(23).

Évolution par rapport à 2014. Par rapport à l'année dernière, la moyenne générale sur l'ensemble de l'épreuve est en légère hausse (8,9 contre 8,51). On peut comprendre ce phénomène grâce au tableau comparatif 1. La principale évolution se situe parmi les copies les plus faibles, car le nombre de copies blanches ou totalement vides a fortement diminué. Ces copies très faibles se retrouvent maintenant bien étalées dans les notes entre 0,5 et 4,5 puisque le nombre global de copies ayant obtenu moins de 4,5 est lui resté stable. Contrairement à l'année dernière, il fallait cette année répondre à 2 questions élémentaires pour obtenir cette note, par exemple en montrant que la trace était une application linéaire (II.1) et que l'ensemble des matrices diagonales était un espace vectoriel (II.3(b)). Comme les années précédentes, l'écart-type est important et vaut 4,5, contre 4,8 en 2014, mais il reste stable inférieur à 3,5 si on retire ces très faibles copies. Il semble qu'il n'y ait pas eu non plus de questions bloquantes cette année, et les candidats ayant abordé avec succès un grand nombre de questions dans les 3 exercices ont encore été nombreux. Les nombres de bonnes copies (au dessus de 10/20) et d'excellentes copies (plus que 16/20) sont restés globalement stables.

Cette évolution peut principalement s'expliquer par la multiplication volontaire de questions plus faciles. Par exemple, la fonction $x \mapsto 1/(1+x^2)$ à étudier au premier exercice était très simple, et toute la première partie de l'exercice de probabilités permettait aux candidats maîtrisant le cours de probabilités de s'exprimer. Dès lors, nous avons cherché à valoriser la rédaction sur ces questions. La notation a alors permis de faire la différence entre les candidats ayant intégré et assimilé les notions de base et ceux récitant un résultat mal appris par coeur.

Ces dernières années, l'épreuve d'écrit a ainsi peu à peu muté vers un nouveau format très progressif avec davantage de questions faciles et un problème guidé dans lequel un plus grand nombre de candidats arrivent à s'exprimer. Ce nouveau format nous paraît

TABLE 1. Éléments statistiques de comparaison entre les épreuves écrites de 2014 et 2015. Ces statistiques concernent l'ensemble des candidats inscrits à l'une au moins des écoles de la banque Lettres et Sciences économiques et sociales et présents à l'épreuve de mathématiques. Les copies "vides" sont les copies non blanches mais ayant obtenu la note zéro ; par exemple, celles des candidats s'étant bornés à recopier l'énoncé.

	2014		2015	
Candidats présents	708		713	
Copies blanches	4	(0,6%)	5	(0,7%)
Copies vides	76	(10,7%)	29	(4,1%)
Notes entre 0 et 1,5	94	(13,3%)	57	(8%)
Notes entre 0,5 et 4,5	76	(10,7%)	131	(18,4%)
Notes entre 10 et 20	311	(43,9%)	316	(44,3%)
Notes entre 16 et 20	51	(7,2%)	44	(6,2%)
Moyenne	8,51		8,9	
Écart-type	4,83		4,51	
Médiane	8.5		9	
Moyenne hors zéros	9,53		9,12	
Écart-type hors zéros	4,05		4,34	
Médiane hors zéros	9		9	
Moyenne des notes $\geqslant 4$	10,3		10,4	
Écart-type des notes $\geqslant 4$	3,5		3,4	
Médiane des notes $\geqslant 4$	10		10	

mieux adapté au niveau des candidats au concours, il n'empêche aucunement la détection des candidats exceptionnels, mais permet de mieux classer les très bons comme les plus faibles avec une bonne progression entre ces deux extrêmes, ce qui est important avec l'augmentation du nombre d'écoles dans la banque.

Analyse des questions les plus faciles. L'analyse statistique de la réussite aux questions de niveau 1 (voir Tableau 2) permet d'affiner légèrement ce constat en distinguant la réussite dans les grands thèmes du programme.

Les deux questions les mieux réussies sont I.3 et II.4. Placé en début d'énoncé, l'exercice d'analyse a été le plus abordé et c'est avec satisfaction que nous avons vu une très nette amélioration de la qualité des graphes dans la question 3 par rapport aux années précédentes. La fonction considérée était certes élémentaire, mais nous avons apprécié que les candidats ayant obtenu un tableau de variation correct sachent très majoritairement en déduire l'allure du graphe.

La première question de l'exercice de probabilités a été légèrement moins bien réussie cette année. La principale difficulté a été le calcul de $\mathbb{P}(X = 0)$, qui était pourtant facilement justifié par le fait que X était une variable à densité. De plus, il est important dans ce genre de question de vérifier la cohérence et la vraisemblance entre les réponses. Il est ainsi particulièrement désagréable de lire, comme nous l'avons vu sur de trop nombreuses copies, que $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ et $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1/2$.

TABLE 2. Éléments statistiques de réussite aux questions de difficulté 1.
Chaque question est notée sur 4. La note 0 est attribuée aux candidats ayant tenté sans succès de répondre à la question.

Question/Note	0	1	2	3 ou 4
I.3 (tableau de variation)	64	107	152	371
II.1	120	25	18	412
II.3b)	164	41	38	257
III.1	115	75	75	275

À l'avenir, nous continuerons autant que possible de proposer des questions élémentaires sur les 3 parties du programme et nous encourageons tous les candidats à lire l'énoncé avant de commencer à rédiger leur copies de manière à identifier dès le début de l'épreuve les questions les plus faciles sur lesquelles une rédaction impeccable leur rapportera de nombreux points.

Conclusion. Ainsi, un travail minimal en mathématiques peut s'avérer très fructueux pour les futurs candidats. Ce travail doit leur permettre de reconnaître et de rédiger proprement les questions les plus simples qui ne font appel qu'à une connaissance de base du cours. Cette année par exemple, ce travail permettait de répondre au minimum aux questions I.1-3, II.1-3b) et III.1. En les rédigeant convenablement, on obtenait déjà 9/20, ce qui évite l'élimination aux candidats les moins à l'aise en mathématiques.

À l'inverse, il est très difficile, voire impossible de réussir sans cet investissement. Ainsi, parmi les 250 sous-admissibles à l'ÉNS de Paris, seulement 10 ont obtenu moins de 7/20, parmi les 63 admissibles, 3 ont obtenu une note de 10/20 ou moins, 12 ont obtenu moins de 13 ; la moyenne des 25 admis se situe à 16,2.

CONSEILS AUX CANDIDATS

Comme chaque année, nous profitons du rapport pour rappeler aux futurs candidats quelques conseils de base pour bien réussir l'épreuve de mathématiques.

Rédaction. L'épreuve n'est pas un concours de vitesse, mais exige rigueur et précision. Nous insistons à nouveau sur l'importance de soigner la rédaction des questions simples du début de chaque exercice. Il est particulièrement dommage de perdre des points sur ces questions élémentaires, notamment pour les candidats les moins à l'aise en mathématiques. Il est beaucoup plus délicat de les récupérer ensuite sur des questions plus difficiles, où l'on demande de s'être approprié les notations et résultats du sujet.
Nous détaillons les principales attentes du jury quant à la rédaction de l'épreuve écrite et indiquons des erreurs courantes qu'il est facile d'éviter. Une réponse bien rédigée doit montrer *clairement* et *sans ambiguité* au correcteur que le candidat a trouvé une démonstration *complète*, *exacte*, *sans argument erroné*, n'utilisant *que des résultats au programme* et *répondant bien à la question posée.*

(1) Ambiguité : un candidat perdra systématiquement des points en laissant floue une partie de son raisonnement, ne serait-ce que parce qu'il se trouve toujours une dizaine d'autres copies levant la même ambiguité avec un argument totalement faux. Ainsi, à la question II.2, les candidats qui ont bien écrit le théorème du rang sous la forme

$\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\text{Ker }(\text{Tr}_n)) + \text{rg}(\text{Tr}_n)$ ont obtenu des points tandis que ceux s'étant contentés de parler d'un espace E général en ont perdu car nous avons trop souvent lu $\dim(\mathbb{R}) = \dim(\text{Ker }(\text{Tr}_n)) + \text{rg}(\text{Tr}_n)$.

(2) Démonstration complète : il est nécessaire de rappeler toutes les hypothèses d'un résultat du cours avant de l'appliquer. Par exemple, à la question I.3, nous avons pénalisé les candidats qui ne justifiaient pas que la fonction était dérivable, de même que ceux qui le justifiaient en disant juste que f était un quotient de fonctions dérivables.
De plus, il faut *toujours* mentionner un résultat prouvé dans une question précédente lorsqu'on l'utilise. Par exemple, pour la question III.13, il était nécessaire de rappeler que la valeur de l'espérance de $e^{\lambda X}$ avait été obtenue à la question III.7 pour l'utiliser dans le calcul de $\mathbb{E}\left(e^{\lambda S_n}\right)$. Tous ceux qui ont simplement affirmé que cette espérance valait $f(\lambda/2)/(\lambda/2)$ sans au moins rappeler ce résultat ont perdu une partie des points.

(3) Démonstration exacte : certaines hypothèses sont inutiles pour traiter des parties d'une question, les mentionner à ce moment jette le doute sur la maîtrise du cours du candidat. Ainsi, à la question III.8, il est inutile que les variables soient indépendantes pour utiliser la linéarité de l'espérance.

(4) Arguments erronés : pire, énoncer une affirmation manifestement fausse ne peut pas servir le candidat, mais seulement jeter la suspicion sur tout ce qu'il écrit, par exemple, dire que l'intersection du noyau de la trace avec les homothéties est vide car la seule matrice qu'elle contient est la matrice nulle montre un manque de maîtrise des concepts mentionnés.

(5) Rédaction/ sténographie : dans de trop nombreuses copies les réponses se résumaient à une succession de symboles sans rédaction. Ainsi dans la partie 3, ajouter à coté de chaque ligne de calcul des "SRAC" ou des "VARAC" est parfaitement inutile. Une notation incomprise du correcteur pénalise systématiquement le candidat.

(6) Orthographe, erreurs de calculs : même en mathématiques, il est vraiment nécessaire de relire sa copie avant de la rendre de manière à éviter d'y laisser des fautes d'orthographe grossières comme "les variables suivent toutent" ou "nous somme". De même, de nombreuses copies contenaient des erreurs de calculs du type $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ qui laissent une très mauvaise impression.

(7) Nous insistons à nouveau sur la présentation de la copie et la lisibilité de l'écriture. Nous avons cette année encore eu beaucoup de mal à déchiffrer certaines copies et probablement pénalisé des candidats croyant sans doute gagner un peu de temps en les négligeant.

Honnêteté. Si nous sommes très contents de voir de plus en plus de copies aborder un grand nombre de questions, nous sommes en revanche toujours irrités par celles qui le font de façon malhonnête.

Comme chaque année, nous encourageons les candidats à vérifier à la relecture la cohérence des résultats mentionnés dans leur copie, au minimum à l'intérieur d'une même question. Ainsi, les candidats qui se sont trompés sur le signe de la dérivée à la question I.3 mais qui ont obtenu un bon tableau de variation se sont vus lourdement pénalisés par rapport à ceux qui ont reconnu qu'ils devaient s'être trompés avant de donner ce même tableau. Les futurs candidats ont intérêt à faire l'effort de vérifier la cohérence de leurs résultats et à signaler honnêtement toute incohérence qu'ils n'arrivent pas à corriger sur leur copie (comme par exemple un encadrement de π manifestement faux à la question I.7). Autant le jury est très magnanime avec un candidat honnête (même s'il aura nécessairement moins de points qu'un candidat ayant une réponse parfaite), autant une tentative de bluff (réelle ou supposée) fait très mauvaise impression et a des répercussions négatives sur la notation tout au long de la copie : les moindres ambiguïtés sont alors systématiquement interprétées comme des erreurs.

Au-delà de l'impression laissée sur le jury, en vérifiant la cohérence des résultats, on se donne surtout l'occasion de corriger une erreur de calcul. Ainsi, dans l'exercice III, plusieurs candidats qui trouvaient une variance négative ont su corriger une erreur dans le calcul de la moyenne. À l'inverse, il est très malvenu d'en profiter pour ajouter une erreur en donnant une mauvaise formule pour la variance comme $\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}\left(X^2\right)$. De même, dans la question III.2, dire que la fonction de répartition est une primitive de la fonction de densité sans préciser laquelle montre un manque de recul, ces candidats finissaient d'ailleurs souvent par donner une fonction prenant des valeurs négatives.

Pour les encourager à poursuivre ces efforts, le jury a récompensé les candidats faisant preuve de recul et d'honnêteté, en ajoutant au barème initial quelques points (autant que pour une question de difficulté moyenne) attribués uniquement en fonction de l'honnêteté et l'absence d'incohérences manifestes au sein de la copie. Il a été en particulier plus facile de mettre en avant les copies modestes mais s'attachant à démontrer rigoureusement tout résultat présenté par rapport aux multiples copies racontant longuement des raisonnements obscurs dans l'espoir qu'une des nombreuses idées lancées soit valorisée. Recopier une question de l'énoncé ne peut jamais rapporter de point et demeure parfaitement inutile.

Remarques spécifiques. Nous avons observé de nombreuses confusions dans l'exercice II entre l'ensemble vide et l'ensemble réduit au vecteur nul 0. Ainsi, pour montrer à la question II.3.b) que les espaces sont en somme directe, on doit montrer que leur intersection est réduite au vecteur nul, mais pour montrer que $D_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, il faut montrer qu'il est non vide. En revanche, à la question II.1, pour montrer que la trace est une application linéaire, dire qu'elle est non vide n'a pas de sens et dire qu'elle est non nulle est inutile puisque ce ne serait pas un problème qu'elle le soit pour cette propriété.

L'exponentielle est une fonction importante en analyse qu'il est fondamental de bien maîtriser. Ce n'était pas le cas cette année comme le montrent les assertions suivantes que nous avons dû lire trop souvent : $r^{2n} = r^2 r^n$ à la question I.2, $x^2 \cdot x^4 = x^8$ à la question I.6 ou $e^{\lambda/2} + e^{-\lambda/2} = e^{\lambda}(e^{1/2} + e^{-1/2})$.

Forme. Il est souhaitable de présenter sa copie le plus clairement possible. En particulier, le jury apprécie que les réponses à un même exercice soient présentées dans l'ordre, et qu'en tous cas les éléments de réponse à une même question soient rassemblés en un seul endroit, sauf mention explicite du contraire. Nous sommes heureux de constater l'effort de la plupart des copies qui les rendent agréables à lire.

Commentaires détaillés sur chaque exercice

Comme les années précédentes, en vue de préciser notre analyse des principales faiblesses observées dans les copies, nous indiquons pour chaque question le nombre de copies ayant obtenu au moins 75% des points ainsi que le nombre de copies l'ayant abordée (sur un total de 713 copies).

Exercice 1. Le but de l'exercice était de trouver deux suites adjacentes convergeant vers le nombre π et d'en déduire un encadrement de ce nombre. Il s'agissait d'un exercice d'analyse élémentaire couvrant les grands thèmes du programme comme les suites et séries, l'étude des variations d'une fonction de la variable réelle ou son intégration sur un segment. Cet exercice a été bien réussi par les candidats qui y ont obtenu environ près de 45% de leurs points. Cette réussite s'est confirmée tout au long de l'exercice puisque près de 200 candidats ont répondu de façon satisfaisante aux questions I.1, I.3 et I.5 et I.7.

Erreurs récurrentes. Il est étonnant de trouver des formules pour $S_1(r)$ et $S_2(r)$ faisant intervenir la variable n dans un nombre non négligeable de copies (de type $S_1(r) = \sum_{n\geqslant 0} r^n = \frac{1-r^n}{1-r}$).

Rappelons qu'un développement limité ou une limite ne donnent que des renseignements locaux sur une fonction, et ne permettent en aucun cas de justifier une inégalité sur un segment, comme par exemple à la question I.6.

Enfin, pour la question I.7, la positivité de l'intégrale signifie que si f est une fonction positive et continue sur un segment $[a, b]$ avec $a \leqslant b$ alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$. On peut en déduire que, si f et g sont deux fonctions continues telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$. Contrairement à ce que nous avons lu dans de nombreuses copies, ces résultats ne sont pas des équivalences et il n'est par ailleurs *pas* nécessaire que les fonctions f et g soient positives ou "de même signe" dans le second résultat.

Commentaires pour chaque question.

1. [220 copies $\geqslant$ 75% sur 498 copies] Nous avons été surpris de la faible réussite pour cette question de cours. Si la plupart des candidats ont identifié qu'il s'agissait d'une série géométrique, beaucoup ont donné des valeurs totalement erronées pour lesquelles elle convergeait, en récitant un cours manifestement mal appris : nous rappelons que la série ne converge pas si $r = 1$ ou $r = -1$, et que la somme de la série ne dépend pas de n. Il semble également que certains candidats aient confondu “série de terme général” et “suite de terme général”. Parmi les bonnes copies, nous avons valorisé celles qui justifiaient le résultat, au moins en mentionnant qu'ils reconnaissaient la série géométrique.
2. [90 copies $\geqslant$ 75% sur 440 copies] Parmi les candidats qui ont traité correctement la première question, moins de la moitié ont su l'appliquer dans un cas particulier en remarquant par exemple que $(-1)^n r^{2n} = (-r^2)^n$. Cette question a donc permis de différencier des candidats qui avaient un recul suffisant pour appliquer le résultat du cours de la question précédente. Parmi les erreurs grossières, rappelons que $0 \leqslant r^2 < 1$ n'est pas équivalent à $0 \leqslant r < 1$ ou pire à $0 < r < 1$ et que l'assertion "la série converge différemment si n est pair ou impair" n'a aucun sens. D'autre part, une série alternée peut converger même si elle ne converge pas absolument, et le critère spécial des séries alternées donne une condition suffisante pour la convergence de la série, mais cette condition n'est pas nécessaire.
3. [268 copies $\geqslant$ 75% sur 696 copies] C'est la question la mieux réussie de l'exercice. Nous avons apprécié que les candidats sachent tracer le graphe d'une fonction simple. L'erreur la plus commune a été d'oublier de justifier la dérivabilité de la fonction ou de le faire en disant que c'était un quotient de fonction dérivables, ou encore parce que la fonction était continue. Moins grave, quand on montre que la dérivé est égale à $(-2x)/(1 + x^2)^2$, on peut dire que le signe de celle-ci *est* celui de $-2x$ et

pas seulement qu'il *en dépend* puisque cette dernière assertion revient littéralement à dire que le signe peut changer selon les valeurs de x, ce qui n'apporte donc aucune information.

4. [101 copies $\geqslant 75\%$ sur 498 copies] L'écriture du développement limité devait être justifiée. Les copies qui donnaient un développement limité correct mais pas au bon ordre ont été sanctionnées. Parmi les candidats qui ont eu recours à la formule de Taylor-Young, la plupart se sont trompés en calculant f''. Le calcul de la tangente devait aussi être justifié, et les copies se contentant d'écrire "l'équation de la tangente se lit sur le développement limité" ont perdu des points.
5. [238 copies $\geqslant 75\%$ sur 596 copies] La question était assez élémentaire puisqu'il suffisait d'intégrer la fonction considérée entre 0 et 1. Toutefois, peu de candidats ont justifié que l'aire pouvait se calculer comme une intégrale car la fonction était continue. De nombreux candidats ne connaissent pas de primitive de $1/(1+t^2)$. Parmi les primitives les plus fantaisistes de cette fonction, nous avons trouvé $\tan(t)$, $\ln(1+t^2)$, $\ln(1+t^2)/(2t)$, $\arcsin(t)$, $\arccos(t)$ ou encore $1/(t+t^2/2)$. Cette primitive est pourtant très classique et il est important pour les candidats de la connaître, de même que celles de quelques fonctions basiques, ainsi que des valeurs particulières de ces fonctions.
6. [74 copies $\geqslant 75\%$ sur 269 copies] Nous nous attendions à ce que les candidats utilisent la question (2) pour la première partie en invoquant le fait que la série était alternée. Cependant, la plupart des copies ayant traité cette question ont prouvé directement que les inégalités demandées étaient valables sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ces copies ont obtenu tous les points à condition de bien préciser que ceci impliquait leur validité sur $[0,1]$. À l'inverse, les candidats qui ont admis l'inégalité sur $[0,1]$, puis l'ont démontrée sur $\mathbb{R}$ sans utiliser ce résultat admis ont perdu des points. Il est plus important en mathématiques de comprendre ce que l'on fait que de savoir mener des calculs, les ordinateurs étant nettement plus performants pour cette dernière tâche.
7. [169 copies $\geqslant 75\%$ sur 431 copies] Cette question était relativement facile puisque le résultat de la question précédente était donné, ce qui explique le grand nombre de copies l'ayant abordée. Nous avons déjà parlé du résultat de positivité de l'intégrale qu'il était fondamental de bien maîtriser pour obtenir tous les points. Nous encourageons sur ce genre de question les candidats à privilégier le raisonnement déductif et à remplacer par des "donc" les signes d'équivalence souvent inutiles quand ils ne mènent pas à écrire des erreurs grossières.
8. [19 copies $\geqslant 75\%$ sur 155 copies] Cette question demandait d'abord d'appliquer le résultat sur les séries alternées puis d'intégrer l'inégalité obtenue pour déduire un encadrement général de π. Les candidats ayant réussi la première partie de la question, la plus difficile, ont majoritairement calculé explicitement les deux sommes qui étaient des sommes partielles de séries géométriques. Seuls les meilleurs candidats l'ont remarqué, mais beaucoup ont gagné quelques points en intégrant correctement l'inégalité de la première partie.
9. [3 copies $\geqslant 75\%$ sur 30 copies] Parmi les rares copies ayant abordé cette question (qui n'était pas la plus difficile de l'exercice), peu ont trouvé la bonne valeur de j. Cette question nous semblait pourtant relativement classique dans un exercice sur les suites et nous ne nous attendions pas à une si faible réussite, même parmi les excellents candidats.

Exercice 2. Le deuxième exercice concernait l'algèbre linéaire. Il s'intéressait à quelques propriétés de la trace d'une matrice. Il avait pour but de trouver une représentation de toutes les formes linéaires sur $M_n(\mathbb{R})$. L'énoncé n'était volontairement pas original, et avait pour but de voir si les candidats connaissaient bien leur cours d'algèbre linéaire, savaient manipuler des définitions générales, mais aussi faire quelques calculs dans des cas particuliers concrets. Les dernières questions, plus délicates, ont permis aux bons candidats de se distinguer.

Parmi les erreurs les plus fréquentes, nous avons d'abord été surpris par le nombre de copies affirmant que $\dim(M_n(\mathbb{R})) = n$. Cette erreur en début d'exercice pouvait avoir des répercutions importantes et certains candidats qui paraissaient pourtant à l'aise ont perdu beaucoup de points en la commettant. Ce genre de résultat est considéré comme élémentaire par le jury. Autre erreur assez grave, un grand nombre de candidats ont confondu les définitions d'applications linéaires et de sous-espaces vectoriels. Ceci les menait à écrire des assertions comme "la trace est non-vide" ou à vérifier la linéarité de l'application $x \mapsto xI$ et à perdre des points pourtant distribués facilement à ceux qui avaient compris ces définitions. Enfin, cet exercice sur une application définie sur un espace de matrice a mis à jour chez plusieurs candidats une confusion entre application linéaire et matrice. Ces candidats n'ont en général alors pas compris l'exercice et ont cherché par exemple une base du noyau de la matrice B de l'exemple donné dans l'énoncé à la question 3.(a).

1. [396 copies $\geqslant$ 75% sur 582 copies] Dans une question de cours comme celle-ci, nous encourageons les candidats à soigner la rédaction, en évitant par exemple de vérifier que la trace de la matrice nulle vaut 0 ou en parlant d'un corps K général quand le corps de base $\mathbb{R}$ est donné dans l'énoncé. De nombreuses copies confondaient les notions d'application linéaire et de sous-espace vectoriel. Nous avons ainsi souvent lu "Montrons que Tr_n est stable par combinaison linéaire", "$\mathrm{Tr}_n \neq \emptyset$ car contient la matrice nulle". Nous signalons ici qu'un candidat a réussi à montrer que la trace était une "application littéraire".
2. [167 copies $\geqslant$ 75% sur 442 copies] Cette question, faisant pourtant appel à des concepts de base d'algèbre linéaire, a été très mal traitée par de nombreux candidats qui ont écrit des assertions n'ayant pas de sens comme "Im (Tr_n) est un réel", "$\mathrm{Tr}_n \neq \{0\}$", "'$\dim(\mathrm{Tr}_n)$". Plusieurs ont fait intervenir des quantités non définies comme un corps K de référence, ou un espace vectoriel E sans préciser ce qu'ils signifiaient, récitant visiblement leur cours plutôt que d'essayer de le mettre en application. Nous avons également lu trop d'assertions farfelues du type "le rang de Tr_n vaut n car il s'agit d'une somme de n nombres réels", ou "la dimension de $M_n(\mathbb{R})$ vaut n (voire $n+1$ ou $2n$)". Cette question montre selon nous le manque de recul des candidats lorsqu'il s'agit d'utiliser les notions d'algèbre linéaire hors du cadre classique des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.
3. (a) [109 copies $\geqslant$ 75% sur 430 copies] Comme la question précédente, cette question plutôt élémentaire a permis aux candidats qui avaient compris les définitions de se distinguer. Parmi les erreurs les plus fréquentes, les candidats ont confondu Tr_2 avec une matrice en cherchant une base de Ker $(\mathrm{Tr}_2 A)$, ou encore ont confondu $\mathrm{rg}\, A$ avec $\mathrm{rg}\, \mathrm{Vect}(A)$. Évidemment, les candidats qui avaient trouvé une dimension du noyau égale à 1 à la question précédente ont été pénalisés, même si cette question leur offrait une bonne occasion de corriger leur erreur. Parmi les candidats qui avaient obtenu la bonne dimension et cherchaient une famille libre de

3 vecteurs, certains manquaient de recul en proposant une famille contenant des matrices dont la trace n'était pas nulle.

(b) [133 copies $\geqslant 75\%$ sur 471 copies] Cette question particulièrement élémentaire a été plutôt mal réussie compte tenu qu'elle ne présentait aucune difficulté. Parmi les erreurs courantes, signalons qu'un espace vectoriel n'est pas seulement un sous-ensemble non-vide, mais qu'il peut être réduit au singleton $\{0\}$. Ainsi, quand il s'agissait de vérifier la stabilité par combinaison linéaire, les copies qui ont écrit $xI_2+\lambda yI_2=(x+\lambda y)I_2 \in M_2(\mathbb{R})$ ont perdu des points. La confusion entre espace vectoriel et application linéaire a pu ici aussi être mise en évidence, certains candidats ont ainsi montré la linéarité de $x \mapsto xI_2$. De manière plus surprenante, nous avons lu dans plusieurs copies (après avoir d'abord cru les premières fois qu'il s'agissait d'une coquille) l'égalité $xI_2+yI_2=xyI_2$.

(c) [27 copies $\geqslant 75\%$ sur 357 copies] Il a été agréable de constater que les candidats ayant abordé la question ont majoritairement réalisé qu'il fallait montrer une double inclusion. Si tous ou presque ont bien réussi à montrer l'inclusion évidente, l'autre a été plus difficile, les candidats se bornant le plus souvent à écrire un gros système qu'ils ont tenté de résoudre pour des matrices B et C fixées. Les plus honnêtes ont reconnu alors qu'ils ne s'en sortaient pas mais de nombreux autres ont tenté un coup de bluff en concluant le résultat final d'obscurs calculs. Cette question a ainsi permis de valoriser les candidats honnêtes. Quelques rares très bons candidats ont spécifié l'égalité $BC=CB$ pour quelques matrices B judicieusement choisies.

4. [112 copies $\geqslant 75\%$ sur 406 copies] Cette question demandait de connaître la définition du produit de matrices, mais aussi d'être à l'aise dans les manipulations d'indices dans deux sommes imbriqueés. Comme souvent, ce genre de questions, que de nombreux candidats avaient probablement déjà traitées pendant leurs années de classes préparatoires, ont été le fruit de nombreuses erreurs ou imprécisions (comme par exemple l'écriture $AB=\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$). Les candidats peu à l'aise en mathématiques cherchent alors à réciter des souvenirs mal appris plutôt que de profiter de l'occasion pour revenir aux définitions et refaire proprement une démonstration qu'ils auraient bien comprise. D'autres n'ont pas compris la définition de la trace et ont écrit $\mathrm{Tr}_n(AB)=\sum_{i=1}^{n} A_{ii}B_{ii}$ ou encore $\mathrm{Tr}_n(AB)=\sum_{i=1}^{n} A_{ii}+B_{ii}$.
5. [41 copies $\geqslant 75\%$ sur 237 copies] Là encore, la question demandait de redémontrer un résultat du cours concernant la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. Pour obtenir tous les points, le plus simple était de revenir à la définition et de montrer que la famille était libre et génératrice, ce qui ne prenait qu'une ligne à chaque fois et montrait au jury de façon indiscutable que les notions étaient comprises. Pour les candidats qui voulaient utiliser la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous rappelons qu'il fallait parler du *cardinal* de la famille $(E^{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et non de sa dimension.
6. [41 copies $\geqslant 75\%$ sur 140 copies] La difficulté de cette question était de calculer proprement les coefficients (tous, pas seulement un en particulier) du produit des matrices sans se perdre dans les différents indices ou dans de longues explications. Cette question était surtout l'occasion de mettre en évidence des propriétés multiplicatives des matrices de la base canonique permettant de résoudre les questions suivantes.
7. (a) [48 copies $\geqslant 75\%$ sur 97 copies] Cette question se résolvait aisément en s'aidant de la question précédente. Les candidats qui avaient abordé sérieusement les

questions de l'exercice l'ont en général remarqué. Précisons ici que considérer $E^{i,j}E^{j,k}$ avec i, j, k différents n'était possible qu'à condition de prendre $n \geqslant 3$ (pour inclure le cas $n = 2$ il fallait considérer plutôt $E^{i,j}E^{j,i}$ avec $i \neq j$), mais nous n'avons pas pénalisé les candidats pour ce détail.

(b) [27 copies $\geqslant$ 75% sur 59 copies] La principale difficulté était d'avoir le recul suffisant pour voir que cette question se déduisait simplement de la précédente et de la décomposition d'une matrice en combinaison linéaire des éléments de la base canonique. Elle a permis de mettre en avant les candidats qui ont compris l'enchaînement des questions et avaient encore en fin de problème la fraîcheur de prendre de la distance après plusieurs questions plutôt techniques.

8. [1 copie $\geqslant$ 75% sur 26 copies] Ici aussi il s'agissait de décomposer la matrice A sur la base canonique pour identifier la matrice B, ce que seul un excellent candidat a su faire.
9. [12 copies $\geqslant$ 75% sur 47 copies] Il fallait donner ici un contre-exemple, qu'on pouvait par exemple construire à partir des matrices $E^{i,j}$. La plupart des candidats ont trouvé un contre-exemple pour $n = 2$ et précisent parfois qu'on peut l'étendre pour tout $n \geqslant 2$ sans expliquer comment. Aucun candidat n'a remarqué que la propriété était vraie lorsque $n = 1$.

Exercice 3. Le dernier exercice, composé de trois parties relativement indépendantes, avait pour but de tester les connaissances et capacités des candidats en probabilités. La première partie était essentiellement composée de questions de cours ou d'applications simples de celui-ci. Elle a permis aux candidats ayant travaillé les probabilités d'assurer une note convenable. Les questions devenaient au fur et à mesure de l'exercice de plus en plus délicates, et ont permis de bien étager les notes.

1. [255 copies $\geqslant$ 75% sur 541 copies] Cette première question permettait de vérifier que les candidats savaient calculer la probabilité qu'une variable à densité appartienne à un intervalle. La principale difficulté a été de justifier le calcul de $\mathbb{P}(X = 0)$. Attention également, ce n'est pas parce qu'un réel n'est pas dans le support d'une variable aléatoire que sa fonction de répartition est nulle en ce point.
2. [207 copies $\geqslant$ 75% sur 498 copies] On vérifiait ici que les candidats savaient calculer la fonction de répartition d'une variable dont on donnait une densité explicite. Nous préférions les copies qui faisaient le calcul à celles qui se contentaient de reconnaître une loi classique (parfois en se trompant). Plus grave, certains candidats confondent fonction de répartition et densité. De nombreux candidats croient que la fonction de répartition est simplement une primitive quelconque de la densité, et n'est donc pas définie de manière unique. Ils obtiennent alors souvent une fonction prenant des valeurs négatives, qui n'est pas croissante ou non continue. Les candidats qui ont tracé une fonction de répartition ne coincidant pas avec la formule qu'ils avaient donnée ont également été sanctionnés.
3. [110 copies $\geqslant$ 75% sur 409 copies] Il s'agissait ici de calculer la fonction de répartition de $-X$ et de vérifier qu'elle coïncidait avec celle de X, ce que de nombreux candidats ont effectivement tenté de faire. Le calcul ne présentait pas de difficultés mais demandait un peu de rigueur que les candidats ont souvent négligée, pensant gagner un peu de temps et perdant surtout quelques points pourtant aisément acquis. L'erreur la plus fréquente a été d'identifier les événements $\{-X \leqslant x\}$ et $\{X \geqslant x\}$, ce qui conduisait à la mauvaise conclusion.

4. [137 copies $\geqslant$ 75% sur 434 copies] Cette question ouvrait le bal des nombreux calculs d'espérance en demandant d'abord celle de X. Rappelons qu'une manière simple de montrer qu'une variable aléatoire réelle admet une espérance est de montrer que la variable est bornée (ce qui était le cas ici car elle était à valeur dans $[-1/2, 1/2]$), ou d'utiliser le théorème de transfert et de remarquer qu'on obtient l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Une fois seulement l'existence de l'espérance ainsi rapidement justifiée, on peut se concentrer sur son calcul et il est alors inutile d'ajouter "SRAC" à coté de chaque ligne de calcul, une notation non standard que le jury ne connaissait pas. D'autre part, nous rappelons que l'espérance d'une variable positive est toujours positive et qu'elle n'est nulle que si la variable est identiquement nulle. Les candidats qui obtenaient $\mathbb{E}(|X|) = 0$ ou un résultat négatif ont ici été lourdement sanctionnés quand ils ne remarquaient pas qu'ils avaient dû commettre une erreur, de même que ceux qui obtenaient un résultat inférieur à celui de $\mathbb{E}(X)$. Il est enfin parfaitement faux que $\mathbb{E}(|X|) = 0$ car X et $-X$ ont la même loi.
5. [62 copies $\geqslant$ 75% sur 312 copies] La variable considérée n'admettait pas d'espérance comme on le voyait en utilisant le théorème de transfert et en reconnaissant par exemple une intégrale divergente en 0. Rappelons qu'il est nécessaire quand on utilise le critère de Riemann d'une part de préciser le point en lequel l'intégrale est impropre et d'autre part, si on introduit un paramètre α, de le définir quelque part. Le jury n'a pas sous les yeux le cours des candidats au moment de la correction. De même que dans la question précédente, les candidats qui ont obtenu $\mathbb{E}(1/|X|) = 0$ auraient dû relever une incohérence.

   Voici un exemple possible de rédaction de cette question :

   D'après le théorème de transfert, $1/|X|$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{|x|}dx$ converge. La fonction $1/|x|$ est continue sur $[-1/2, 0[$ et $]0, 1/2]$. Donc l'intégrale $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{|x|}dx$ converge si et seulement les intégrales $\int_0^{1/2} \frac{1}{|x|}dx$ et $\int_{-1/2}^{0} \frac{1}{|x|}dx$ convergent. Or $\int_0^{1/2} \frac{1}{|x|}dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x}dx$ est une intégrale de Riemann divergente en 0. Donc $1/|X|$ n'admet pas d'espérance.

   Nous insistons sur le fait qu'il faille d'abord justifier qu'une variable admet une espérance avant de la calculer. Ainsi, les raisonnements commençant par "Sous réserve de convergence, [...]" ont mené de nombreux candidats à écrire

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{|x|}dx = [\ln(|x|)]_{-1/2}^{1/2} = 0$$

   et à conclure que $1/|X|$ admettait une espérance nulle.
6. [187 copies $\geqslant$ 75% sur 375 copies] Ce calcul demandait surtout d'être mené avec soin, les candidats méticuleux ont en général su retrouver le résultat classique donnant la variance de la loi uniforme. Nous avons toutefois vu ici apparaître des fautes de calcul très grossières comme $1/24 + 1/24 = 1/48$ même parmi des candidats qui avaient su mener des calculs corrects jusqu'ici. Les candidats qui ont cherché à déterminer la loi de X^2 l'ont rarement fait sans finir par faire une erreur de calcul. D'autres appliquaient mal le théorème de transfert et modifiaient les bornes d'intégration.
7. [192 copies $\geqslant$ 75% sur 298 copies] La présence d'un paramètre λ a ici essentiellement découragé les candidats les moins à l'aise, et a permis de creuser l'écart entre

ceux qui s'étaient contentés d'apprendre quelques rudiments de probabilités et ceux qui maîtrisaient bien les bases.

8. [174 copies $\geqslant 75\%$ sur 354 copies] L'existence de l'espérance se justifiait ici par la linéarité de l'espérance et l'existence de l'espérance des X_i. Les candidats étaient en général beaucoup plus à l'aise pour cette justification que pour les précédentes, reconnaissant probablement un raisonnement déjà répété dans l'année. Rappelons toutefois que l'indépendance des variables n'est pas nécessaire pour utiliser la linéarité de l'espérance. La mentionner ne fait que jeter le doute sur la maîtrise du candidat des concepts qu'il manie.
9. [129 copies $\geqslant 75\%$ sur 312 copies] Les candidats qui ont abordé cette question ont globalement bien commencé le raisonnement : ils ont bien su utiliser l'indépendance et souvent obtenu que le résultat était la puissance n-ième de la fonction de répartition de X. Pour avoir tous les points, il fallait complètement expliciter ce résultat et pas se contenter d'écrire $(x + 1/2)^n$ sans par exemple préciser pour quelles valeurs de x ce résultat s'appliquait. Sur certaines copies, on a pu lire des conclusions absurdes comme $\mathbb{P}(X_1 \leqslant x) \cdots \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = n\mathbb{P}(X_1 \leqslant x)$.
10. [92 copies $\geqslant 75\%$ sur 297 copies] La seule difficulté supplémentaire ici était de penser à écrire que $\mathbb{P}(m_n \leqslant x) = 1 - \mathbb{P}(m_n \geqslant x)$ avant d'utiliser l'indépendance, les candidats ayant réussi la question précédente ont donc généralement résolu celle-ci aussi. L'erreur la plus commune a été d'écrire l'événement "le minimum est plus petit que x" comme une union et d'utiliser la formule $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Cette dernière formule n'est valable que lorsque A et B sont disjoints, ce qui n'était pas le cas.
11. [31 copies $\geqslant 75\%$ sur 243 copies] Cette question plus délicate a pourtant été réussie par un nombre raisonnable de candidats à la très grande satisfaction du jury. Il suffisait par exemple de considérer l'événement $\{m_n > 0\} \cap \{M_n < 0\}$ pour obtenir le résultat proprement. Parmi les candidats qui avaient la bonne idée, beaucoup ont perdu des points en considérant à la place de 0 un x général mais sans préciser qu'ils le prenaient dans l'intervalle $]-1/2, 1/2[$. En revanche, certains écrivent des formules comme "$\mathbb{P}(M_n \cap m_n) = \mathbb{P}(M_n) \cdot \mathbb{P}(m_n)$" qui n'ont pas de sens.
12. [3 copies $\geqslant 75\%$ sur 162 copies] Cette question faisant appel à un sens probabiliste était plus subtile, et a naturellement été beaucoup moins bien réussie. Il fallait utiliser le fait que X avait même loi que $-X$ et donc, par indépendance, S_n et $-S_n$ aussi. L'indépendance est cruciale ici, car il n'est en général pas vrai que si X et Z ont la même loi, de même que Y et T, alors $X + Y$ et $Z + T$ ont la même loi (prendre par exemple prendre pour X une variable gaussienne centrée, $Z = Y = X$ et $T = -X$). Enfin, pour être totalement rigoureux, il fallait dire que $\mathbb{P}(S_n = 0) = 0$ car la variable S_n était à densité. Seules les meilleures copies ont ici présenté des preuves (presque) abouties. Parmi les autres, certaines obtiennent le bon résultat avec une justification erronée (ce n'est pas parce qu'une variable aléatoire réelle X vérifie $\mathbb{E}(X) = 0$ que $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1/2$), et beaucoup d'autres ont voulu répéter le raisonnement des questions 9 et 10, obtenant des $1/2^n$ ou $1 - 1/2^n$, d'autres obtenaient 0 ou 1 pour d'obscures raisons, le pire était bien sûr ceux qui utilisaient une "linéarité de la probabilité" obtenant des résultats aberrants comme $n/2$, $1-n/2$, n ou même $n - nF_X(x)$, sans même mentionner qu'un tel résultat avait quelque chose de surprenant.

13. [40 copies $\geqslant$ 75% sur 144 copies] Il fallait commencer par justifier pourquoi la variable aléatoire $\mathbb{E}\left(e^{\lambda S_n}\right)$ admettait une espérance, ce que seuls une poignée de candidats ont pensé à faire. Ensuite, on utilisait l'indépendance pour se ramener à la transformée de Laplace de la variable X calculée à la question 7, ce qui a été fait sérieusement par un nombre très convenable de candidats. Il fallait bien préciser qu'on utilisait l'indépendance des variables aléatoires $e^{\lambda X_1}, e^{\lambda X_2}, \ldots, e^{\lambda X_n}$. Le résultat étant donné, plusieurs copies ont voulu l'obtenir par "linéarité de l'espérance", ou en confondant "identiquement distribuées" et "identiques" pour écrire
$$\mathbb{E}\left(e^{S_n}\right) = \mathbb{E}\left(\left(e^{\lambda X}\right)^n\right) = \mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right)^n \quad ,$$
et ont perdu des points d'honnêteté.
14. [aucune copie $\geqslant$ 75% sur 109 copies] Aucun candidat n'a réussi cette question très difficile sans indication. On pouvait écrire les exponentielles comme des séries :
$$e^{u^2/6} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^{2i}}{6^i i!} \qquad \text{et} \qquad \frac{e^u - e^{-u}}{2u} = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^i}{i!} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-u)^i}{i!}}{2u} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^{2i}}{(2i+1)!},$$
puis vérifier que $6^i i! \leqslant (2i+1)!$ pour tout $i \geqslant 1$ (par exemple par récurrence).
15. [21 copies $\geqslant$ 75% sur 76 copies] Il s'agissait ici d'utiliser les résultats des questions précédentes en appliquant l'inégalité de Markov à $e^{\lambda S_n}$. L'erreur la plus courante a été d'appliquer cette inégalité à S_n directement, ce qui n'était pas possible puisque S_n n'était pas positive.
16. [1 copie $\geqslant$ 75% sur 36 copies] Il fallait dans cette question optimiser l'inégalité précédente en λ, ce que seule une copie exceptionnelle a réussi. Les autres candidats ont essayé de montrer que l'inégalité $-\lambda t + n\lambda^2/24 \leqslant -6t^2/n$ était toujours vérifiée. Ils ont soit échoué, ce qui était normal, soit pensé réussir, ce qui était faux.
17. [2 copies $\geqslant$ 75% sur 46 copies] Il fallait utiliser le théorème de la limite centrée pour montrer que la suite $\mathbb{P}\left(S_n/(\sqrt{n/12}) > t\right)$ convergeait vers $\mathbb{P}(Z > t)$ et la question précédente pour majorer toutes les valeurs de la suite par $e^{-t^2/2}$. Les candidats se sont en général contentés de mal citer le théorème de la limite centrée en écrivant par exemple que $\mathbb{P}\left(S_n/(\sqrt{n/12}) > t\right) = \mathbb{P}(Z > t)$ pour n assez grand. Si l'inégalité proposée pouvait s'obtenir directement dans le continu, le but de cette question était d'utiliser des approximations discrètes pour obtenir le résultat demandé.
18. [2 copies $\geqslant$ 75% sur 9 copies] Il suffisait dans cette question de dire que la variance de la variable $|S_n|$ était positive. Cette question astucieuse a été très peu tentée et réussie seulement par les toutes meilleures copies.
19. [3 copies $\geqslant$ 75% sur 7 copies] On utilisait ici la majoration de la question précédente et le fait que $\mathbb{E}\left(S_n^2\right) = \mathrm{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)$.
20. [aucune copie $\geqslant$ 75% sur 9 copies] Cette question d'ouverture n'a pas été abordée sérieusement. Le jury s'attendait à ce que les candidats proposent d'utiliser le théorème de la limite centrée pour conjecturer que, si Z est une variable normale centrée réduite, $\mathbb{E}\left(|S_n|/\sqrt{n/12}\right) \to \mathbb{E}(|Z|)$, et calculent $\mathbb{E}(|Z|)$.
21. [11 copies $\geqslant$ 75% sur 82 copies] C'est la seule question de cette partie qui a été abordée par un nombre représentatif de candidats. Il s'agissait essentiellement de réécrire l'événement d'intérêt pour pouvoir utiliser l'indépendance de N et des X_i. Les bons candidats s'en sont ici très bien sortis.

22. [1 copie $\geqslant 75\%$ sur 17 copies]   Cette question plus délicate n'a été abordée que dans les excellentes copies et nous félicitons ici le candidat qui a réussi à mener parfaitement à bien tout le raisonnement.
23. [3 copies $\geqslant 75\%$ sur 19 copies]   Il fallait ici encore conditionner par les valeurs de N, utiliser l'indépendance de N et des X_i puis l'indépendance des X_i pour se ramener à une série exponentielle. Là encore, nous tenons à saluer les 3 candidats qui ont su mener à bien ce calcul sans se perdre dans les multiples indices et paramètres et montrant ainsi leurs qualités de rigueur et d'ingéniosité.