MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ORAL

Igor Kortchemski, Matthieu Lerasle

Coefficient : 2

Durée : 1 heure de préparation et 30 min de passage (dont au plus 10 minutes laissées au candidat).

Calculatrice interdite

1. Commentaires généraux

Le jury a été enthousiasmé par le niveau général des candidats : la moyenne des notes de cette année s'établit à 11.3, contre 10 l'année dernière (avec des critères de notation similaires). La plupart des candidats connaissent relativement bien leur cours, parviennent à résoudre seuls des questions faciles, voire quelques questions plus difficiles avec des indications. Cependant, nous déplorons que 13 candidats (soit environ 20% des admissibles) ont obtenu des notes inférieures ou égales à 6/20 témoignant de grosses lacunes sur des notions élémentaires du programme. L'écart-type est ainsi plutôt élevé à 4.99 contre 4.27 l'année dernière. Plusieurs excellents candidats ont impressionné le jury par leur maîtrise des mathématiques, ainsi, 7 d'entre eux ont obtenu une note supérieure ou égale à 18. Nous tenons à féliciter les candidats ainsi que leurs professeurs pour le travail accompli, leurs efforts ont été récompensés.

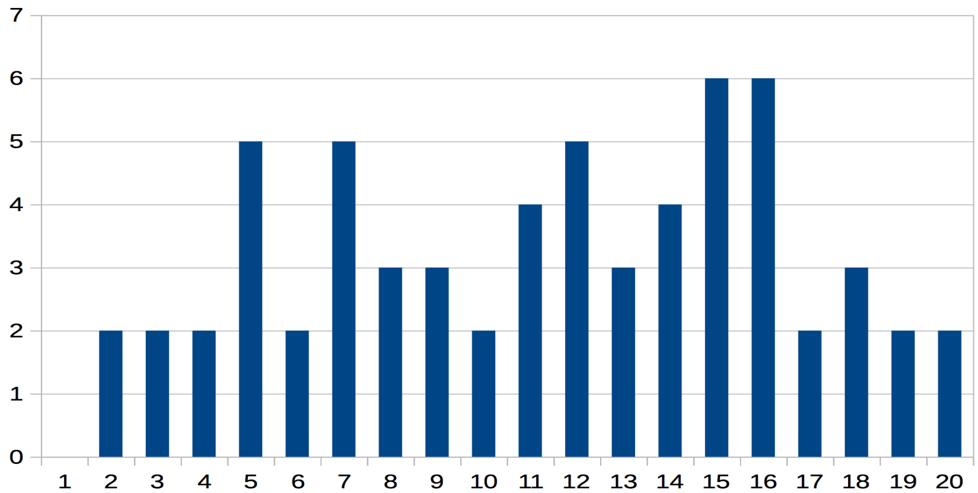

Figure 1. Histogrammes des notes de l'oral.

Analyse des notes. L'histogramme des notes montre des concentrations de notes aux alentours de 5,7, 12 et 15–16, qui correspondent à quatre types de prestations orales qu'on pourrait très approximativement décrire comme suit.

- note $\simeq 5$: le cours n'est pas bien maitrisé, mais les candidats arrivent à traiter des question faciles.
- note $\simeq 7$: le cours n'est pas très bien maitrisé et/ou les candidats accumulent quelques erreurs, mais arrivent à traiter plusieurs questions de la planche.
- note $\simeq 12$: le cours est globalement bien maîtrisé, les candidats ne commettent pas beaucoup d'erreurs et ont plutôt bien avancé dans les planches avec une aide conséquente du jury.
- note $\simeq$ 15–16 : le cours est bien maîtrisé, et les candidats ont bien avancé de manière autonome dans les planches et réagissent bien aux indications du jury.

L'histogramme montre que peu de candidats obtiennent une note de 9 ou 10/20. Ainsi, cette année, il y a eu peu de candidats maîtrisant globalement bien leurs cours sans être autonomes sur les exercices. Parmi les 25 candidats admis, 16 ont eu au moins 15/20.

2. Déroulement de l'épreuve

Les candidats disposent d'abord d'une heure pour préparer leur passage à l'oral. Chaque planche est constituée de deux exercices totalement indépendants. Chaque couplage est construit dans un triple objectif d'équilibre : couverture thématique (analyse, algèbre, probabilités/statistiques), difficulté (deux exercices moyens, ou bien un exercice facile ou court couplé avec un plus difficile ou long), et originalité. Cette année, nous avons prêté une attention toute particulière à la progressivité des planches, qui contenaient toutes des questions faciles pour mettre en confiance les candidats. Mentionnons que toutes les planches sont prêtes avant le début des épreuves, et sont distribuées selon un ordre aléatoire défini avant le début des oraux.

Lors du passage à l'oral, qui dure environ 30 minutes, le candidat dispose de dix minutes, **au maximum**, pour présenter ce qu'il a réussi à faire lors de sa préparation. Le reste du temps est dédié à une discussion avec le jury. Celui-ci revient d'abord sur ce qu'a écrit *et* dit le candidat afin de rectifier certaines erreurs ou corriger des maladresses. Ensuite, afin de tester les réactions et le recul, les examinateurs abordent les questions que le candidat n'a pas réussi à faire en donnant des indications. Dans le cas de très bons candidats, le jury n'hésite pas à poser des petites questions supplémentaires ne figurant pas dans la planche.

Dans l'ensemble, le déroulement de l'oral est très satisfaisant et permet au jury de bien évaluer les candidats en leur donnant l'opportunité de bien montrer tout ce qu'il savent faire dans les deux exercices proposés, voire davantage.

3. Conseils aux candidats

Certains candidats pourraient toutefois améliorer leur prestation en faisant attention aux points suivants :

- il ne faut pas utiliser les dix minutes coûte que coûte lors de la première phase de l'oral. Comme explicitement marqué sur l'énoncé, il est conseillé de ne pas trop entrer dans les détails de calculs. Il est toujours judicieux de présenter de manière concise les étapes importantes du raisonnement. En cas de doute, le jury reviendra sur les détails lors de la reprise. Certains candidats ont eu du mal à trouver le bon équilibre, détaillant parfois excessivement des calculs simples ou passant sous silence des points clés. D'autres, n'ayant traité que peu de questions en préparation, ont fait traîner en longueur la présentation pour remplir les dix minutes, ce qui n'a pu que les desservir. À l'inverse, les candidats ne doivent en aucun cas prendre plus de dix minutes pour l'exposé dans leur intérêt même, car ils réduisent inutilement leurs opportunités de profiter de l'interaction avec le jury pour avancer dans les exercices. Le cas échéant, le jury est amené à interrompre l'exposé. Même si un candidat a beaucoup de choses à présenter, il est nécéssaire qu'il fasse un choix dans les détails qu'il donne (le jury lui demandera éventuellement des précisions).

Nous insistons sur le fait que la prestation orale est notée sur sa totalité. Ainsi, une présentation courte n'est pas du tout pénalisée en soi, et elle laisse simplement plus de temps au candidat pour améliorer sa note lors de la reprise. Celle-ci est très importante pour la determination de la note : un candidat ayant bloqué sur des questions pourra obtenir une très bonne note s'il réussit à bien exploiter les indications données par le jury et montre une bonne maîtrise des notions essentielles du programme sans dire ou écrire des assertions fausses.

– Une bonne gestion du tableau est primordiale pour un bon déroulement de l'oral, et le jury ne souhaite pas que le candidat efface le tableau pendant la première phase d'oral. Ainsi, il faut éviter de commencer par écrire en plein milieu du tableau la réponse à la première question, puis demander au jury s'il est possible d'effacer. Il faut cependant mentionner que la majorité des candidats sont bien entraînés à cet exercice délicat, et arrivent à bien gérer le tableau.

– Les questions des exercices étant en général posées dans un ordre de difficulté croissant, nous conseillons aux candidats de bien se concentrer sur les premières questions avant d'aborder les suivantes.

– Le jury cherche à évaluer le plus justement les candidats et n'essaiera jamais de les "piéger". En général, lorsque le candidat est laissé sans indication, c'est que le jury estime qu'il est sur une bonne piste. Il est donc inutile, voire contre-productif, pour le candidat de s'arrêter, se retourner et chercher l'acquiescement du jury à chaque étape du raisonnement. Nous encourageons les candidats à écrire au tableau, surtout les indications données à la reprise. Les formules mathématiques énoncées oralement peuvent être ambivalentes et la simple écriture au tableau permet par exemple au jury de rectifier une erreur d'interprétation du candidat.

– Lors de la reprise, nous conseillons aux candidats de ne pas être collés à leurs feuilles de brouillon pour tenter d'y dénicher les réponses aux questions du jury. Généralement le jury aura fait en sorte que tous les éléments nécessaires soient présents au tableau.

– Nous invitons les candidats à se méfier des 'demi-souvenirs' qui peuvent amener à énoncer des énormités.

– Nous encourageons les candidats à se méfier de l'impression qu'ils ont de leur prestation, qui ne reflète probablement pas leur note. Ainsi, quelle que soit sa préparation, un candidat ne doit jamais se démobiliser en croyant avoir raté son oral, alors que les attentes du jury ne sont pas exactement les mêmes sur tous les exercices.

4. Erreurs les plus fréquentes

Nous signalons ici quelques erreurs commises par plusieurs candidats dans différentes planches.

– Lorsque $n \geqslant 3$, il n'est pas vrai en général que des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_n$ d'un même espace vectoriel sont en somme directe lorsque $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n = \emptyset$.

– Lorsque $n \geqslant 3$, il n'est pas vrai en général que si $C_1, C_2 \ldots, C_n$ sont des événements tels que $C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n C_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(C_i)$.

– La positivité de l'intégrale signifie que si f est une fonction positive et continue sur un segment $[a, b]$ avec $a \leqslant b$ alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$. On peut en déduire que, si f et g sont deux fonctions continues telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$. Il n'est *pas* nécessaire que les fonctions f et g soient positives ou "de même signe" dans ce dernier résultat.

– Pour montrer que E et F sont en somme directe, il s'agit de montrer que leur intersection est réduite au vecteur nul, et non pas qu'ils ont une intersection vide (confusion très souvent faite à l'oral par les candidats).

5. Commentaires planche par planche

Une même planche a été donnée à deux, trois ou quatre candidats (quatre la plupart du temps) consécutifs par demi-journée.

Planche 1. Le premier exercice d'algèbre linéaire était composé en deux parties. La première consistait essentiellement à (re)démontrer des propriétés de sous-espaces propres, et a permis de bien tester la connaissance du cours des candidats (en particulier la définition de somme directe de plus de deux sous-espaces vectoriels). La deuxième partie donnait une application au fait qu'un endomorphisme sur un espace de matrices a un nombre fini de valeurs propres différentes, et a été plutôt mieux réussie. Le raisonnement par récurrence de la question (4) a par exemple été bien mené.

Le second exercice d'analyse s'intéressait à des fonctions höldériennes. Les interrogations ont essentiellement porté sur les deux premières questions de cours concernant le théorème des accroissements finis (et ses hypothèses !), avec une brève excursion à l'application de la définition de continuité.

Planche 2. La planche commençait par une étude d'un endomorphisme sur l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n. L'exercice a été globalement bien réussi mis à part quelques erreurs de calcul. La reprise a surtout porté sur l'identification de l'image de f, que les candidats ont d'abord décrite comme l'espace vectoriel engendré par $(f(X^2), f(X^3), \ldots, f(X^n))$.

Le second exercice mêlait probabilités discrètes, conditionnelles et statistiques. Les candidats ont su, éventuellement avec une indication, trouver l'estimateur sans biais à la question (3) en sortant des sentiers battus des moyennes empiriques classiques. Il est cependant dommage que même des bons candidats ne connaissent pas les hypothèses d'application des probabilités totales. La difficulté consistait à devoir introduire soi-même des notations pour des événements considérés dans l'énoncé. La dernière question n'a été abordée que très succinctement.

Planche 3. Le premier exercice s'intéressait à des suites dont les limites sont calculées en utilisant une comparaison série-intégrale. Le changement d'indices nécessaire pour la deuxième inégalité de la première question a étonnamment perturbé les candidats, qui n'ont également pas su citer correctement la propriété de "croissance" ou de "positivité" de l'intégrale. La troisième question n'a été abordée qu'à la reprise.

Le second exercice étudiait des lois discrètes obtenues en lançait différentes pièces. Il s'agissait aussi d'utiliser (et de reprouver) la formule des probabilités totales, que les candidats connaissaient. La deuxième question, plus astucieuse, a toutefois été bien traitée par les candidats avec de l'aide à la reprise.

Planche 4. Cette planche difficile était constituée d'un exercice assez long et guidé d'analyse, et un exercice d'algèbre linéaire plus court et astucieux. Le premier exercice, faisant intervenir plusieurs paramètres, a déstabilisé les candidats. La discussion avec le jury a essentiellement porté sur la première question, qui permettait déjà de tester les connaissances des candidats sur des concepts élémentaires d'analyse tels que la continuité, la définition des équivalents et les suites définies par récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. La question (5) a permis de vérifier les développements limités de deux fonctions usuelles, voire la connaissance de la formule de Taylor.

Le deuxième exercice, assez délicat sans indication, n'a été abordé substantiellement que par un très bon candidat.

Planche 5. La planche commençait par un exercice de probabilités finies autour de la formule des probabilités totales et la formule de Bayes. Cet exercice a été globalement bien réussi par les candidats qui ont résolu toutes les questions avec parfois l'aide du jury. En particulier, les questions de cours étaient essentiellement maîtrisées.

Le deuxième exercice s'intéressait un espace vectoriel de fonctions, de dimension finie. Cet exercice était plus ambitieux : original dans sa forme et difficile sur le fond. Cependant, la plupart des candidats ont résolu la première question avec des indications, et deux excellents candidats ont bien abordé à la reprise quelques questions difficiles avec succès.

Planche 6. L'exercice d'analyse était bien progressif en étant constitué d'une simple étude de fonctions, suivie d'une application à l'entropie et enfin à la résolution plus astucieuse d'un système non linéaire à trois inconnues et deux équations. La première question a été bien traitée par tous les candidats, ainsi que la seconde (avec parfois des indications à la reprise). Cependant le cas d'égalité, important pour la dernière question, a donné du fil à retordre aux candidats.

Le deuxième exercice de probabilités, original mais guidé, visait à démontrer une inégalité de Kolmogorov. Les candidats n'ont pas été déstabilisés par l'énoncé. Ils ont su traiter les deux premières questions. La troisième question a été beaucoup été discutée à la reprise, deux autres questions ont été rapidement abordées par deux candidats.

Planche 7. Le premier exercice d'analyse s'intéressait à des polynômes construits par récurrence linéaire, connus sous le nom de polynômes de Tchebychev. L'exercice a permis de tester les candidats sur le raisonnement par (double) récurrence, les formules trigonométriques, les racines de cos et des polynômes. Les candidats ont montré une maîtrise de ces éléments, à l'exception de la détermination des racines de P_n, qui consistait à composer les solutions de $\cos(nx) = 0$ par cos et à réaliser qu'il n'y en avait que n différentes.

Les candidats ont résolu les deux premières questions du deuxième exercice, original, de combinatoire. Ils ont fait preuve d'inventivité en pensant à raisonner par l'absurde pour la question (3). La fin de l'exercice, plus difficile, n'a été légèrement abordée à la reprise qu'avec un candidat.

Planche 8. L'exercice 1 visait à démontrer, sur un exemple guidé, un cas particulier du lemme des noyaux. Cet exercice a été bien réussi aux candidats, parfois après des indications pour la deuxième questions. La majorité des candidats ont d'abord écrit que $f(x) - x \in \mathrm{Ker}\ (f - I)$ et que $f(x) - 2x \in \mathrm{Ker}\ (f - 2I)$.

Le deuxième exercice, plus original pour les candidats, proposait de prouver un lemme sous-additif pour des suites réelles, avec une application à la combinatoire des chemins auto-évitants du plan. Les candidats ont mis du temps à bien digérer la définition de l, et ont peu avancé dans l'exercice, à l'exception d'un candidat époustouflant qui a également répondu avec aisance à de nombreuses questions supplémentaires.

Planche 9. Tous les candidats ont commencé par présenter le second exercice, où il s'agissait de calculer des espérances et variances de deux estimateurs construits à partir de variables aléatoires indépendantes et uniformes sur un segment. L'exercice a été l'occasion de sonder les connaissances des candidats en statistiques. Cet exercice a permis de mettre en valeur deux bons candidats à l'aise dans ces domaines. Certains ont invoqué l'indépendance pour utiliser la linéarité de l'espérance, mais ont su corriger à l'oral.

L'autre exercice, d'algèbre linéaire, permettait de tester les capacités de logique des candidats, en manipulant des images directes, images réciproques, doubles inclusions, équivalences. Le début a bien été abordé, et seul un excellent candidat a abordé l'exercice quasiment en entier dès la préparation.

Planche 10. Le premier exercice concernait des manipulations de concepts de base d'algèbre linéaire en dimension finie comme des sommes de sous-espaces vectoriels, de noyaux et images d'applications linéaires, ainsi que le théorème du rang. Les candidats ont globalement abordé l'exercice dans sa totalité, mais quelques-uns, dont un très bon candidat, ont confondu les notions de sous-espaces supplémentaires et d'ensembles complémentaires.

Le deuxième exercice, concernant une suite définie à partir d'une intégrale, a pu tester l'intuition en analyse des candidats et leur maîtrise technique en intégration par parties et changements de variables. Les candidats ont ici aussi globalement bien abordé l'exercice grâce aux indications du jury.

Planche 11. Cette planche a posé des difficultés aux candidats, qui n'étaient pas très à l'aise dans l'exercice 1 où intervenait une famille libre de polynômes, et qui donnait une application intéressante au fait que le nombre d'éléments d'une famille libre dans un espace vectoriel de dimension finie n'excède pas sa dimension.

Dans l'exercice 2, aucun n'a su correctement énoncer le théorème des valeurs intermédiaires, ce qui était embêtant pour traiter la première question. Les candidats n'ont pas eu le réflexe de résoudre l'équation $f(x) = y$ pour la question 2, et quelques-uns ont pu aborder les questions 3) et 4) dans un cas particulier avec l'aide du jury.

Planche 12. En ce qui concerne le premier exercice d'algèbre linéaire, les candidats ont généralement su montrer l'équivalence entre les deux premières assertions en utilisant le théorème du rang. L'équivalence avec l'assertion (c) a été volontairement posée sans indication pour tester les réactions des candidats à la reprise. Les candidats se sont majoritairement montrés à l'aise dans ces questions d'algèbre linéaire élémentaire abstraites.

Le deuxième exercice avait pour but de comparer les comportements asymptotiques d'une fonction et de sa dérivée. Les candidats ont été ici davantage en difficulté, en particulier ceux qui n'ont pas reconnu un taux d'accroissement et qui connaissaient mal la formule de Taylor avec reste intégral. Les deux dernières questions n'ont quasiment pas été abordées, seul un excellent candidat a traité cette partie avec indications.

Planche 13. Le premier exercice, assez original pour les candidats, a été bien abordé. Les candidats ont su combiner dénombrement et probabilités finies, en particulier en introduisant des notations pour les ensembles considérés. La dernière question n'a été résolue que par un candidat.

Le deuxième exercice commençait par un exemple simple d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour étudier une suite récurrente un peu plus complexe. Les candidats ont su faire les questions faciles, parfois avec un peu d'aide. Signalons que le résultat disant que f croissante implique que la suite est monotone était mal assimilé par les candidats, qui ne savaient plus le redémontrer. Les dernières questions ont été souvent abordées à la reprise avec succès.

Planche 14. Le but du premier exercice était de résoudre une équation fonctionnelle en utilisant une suite arithmético-géométrique. La première question a posé des difficultés à presque tous les candidats, qui, comme pour la planche 13, ne savaient plus pourquoi la croissance de la fonction considérée implique la monotonie de la suite. Les autres questions ont été abordées à la reprise, mais aucun candidat n'a su démontrer qu'une fonction de dérivée constante était affine.

Le deuxième exercice, plus original, a été peu abordé. Il a néanmoins permis à quelques candidats ayant des difficultés en analyse de s'exprimer. Les candidats n'ont généralement pas réalisé que les indices i et j étaient interchangeables à la première question. La question de dénombrement a été traitée par la moitié des candidats, mais les dernières questions, bien plus difficiles, n'ont pas été regardées.

Planche 15. Le premier exercice d'analyse s'intéressait à une suite d'intégrales à paramètres. les candidats ont résolu, parfois avec des indications, les deux premières questions. La dernière question n'a quasiment pas été abordée.

Le second exercice avait pour but de montrer (ou redémontrer) qu'une matrice ayant un inverse à droite admettait un inverse à gauche qui était le même, et de donner un exemple d'application. Les candidats n'ont pas su mobiliser l'ensemble de leurs connaissances en algèbre linéaire pour la deuxième question : beaucoup ont affirmé que si A, M sont deux matrices telles que $AM = 0$ et $A \neq 0$ alors $M = 0$, et certains ont affirmé qu'un endomorphisme injectif était surjectif quel que soit l'espace vectoriel considéré. Aucun candidat n'a résolu la dernière question, très astucieuse, sans indications.

Planche 16. Le premier exercice mêlait probabilités finies et étude d'une suite arithmético-géométrique. Les premières questions ont été généralement résolues par les candidats lors de la préparation, et les questions restantes abordées lors de la reprise. Contrairement à la planche 14, davantage de (bons) candidats étaient à l'aise dans l'analyse des suites arithmético-géométriques.

Le deuxième exercice, plus original, visait à résoudre une inégalité fonctionnelle. Les trois premières questions ont été bien traitées par les candidats, parfois avec des indications. La question (4), plus délicate, a été abordée partiellement à la reprise avec quelques bons candidats, et a donné lieu à des discussions sur les liens entre les comportements asymptotiques d'une fonction et de sa dérivée.

Planche 17. Le premier exercice concernait l'étude d'une fonction vérifiant deux inégalités faisant intervenir sa dérivée. Les deux premières questions étaient faciles et, bien qu'abstraites, n'ont pas posé de soucis aux candidats. La troisième question demandait d'avoir l'idée d'évaluer g en 0, et la quatrième question d'introduire une nouvelle fonction à l'aune des questions précédentes. Plusieurs candidats ont résolu l'exercice entièrement dès la préparation, et nous leur avons alors posé quelques questions connexes pour tester leur réactions :

- Pourquoi une fonction dérivable de dérivée positive est-elle croissante ?
- Donner un exemple de fonction f satisfaisant aux conditions de l'énoncé.
- Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $xf'(x) + f(x) = 0$ (indication : on pourra calculer $f'(x)/f(x)$).
- Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $xf'(x) + f(x) = 0$.

Le deuxième exercice visait à démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz en mélangeant algèbre (polynômes du second degré) et analyse (positivité d'un polynôme à coefficients réels), avec une application à la majoration de la norme subordonnée d'une matrice. Les candidats ont correctement résolu la première question, et ont réalisé que la deuxième question revenait à montrer que le discriminant était négatif. Cette question assez délicate a été résolue par un bon candidat à la préparation, et par la plupart des autres à la reprise. Signalons que la première inégalité de la question (3) n'a pas été abordée. Ici également nous avons posé quelques questions supplémentaires à des excellents candidats pour tester leurs réactions :

- Donner une condition nécessaire et suffisante sur les vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ pour qu'il y ait égalité à l'inégalité de la question (2).
- Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels tels que $x_1 + \cdots + x_n = n$. Montrer que $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant n$. Quand est-ce qu'il y a égalité ?

Nous avons été enthousiasmés par le niveau des candidats sur cette planche.

Planche 18. Le premier exercice d'algèbre linéaire (en dimension quelconque) étudiait des endomorphismes particuliers (des projecteurs). Il s'agissait essentiellement d'établir plusieurs décompositions en somme directe par double inclusion en manipulant les relations définissant les divers endomorphismes introduits. Ce type d'exercice, abstrait, pose généralement des difficultés aux candidats. Cependant, tous les candidats qui sont passés sur cette planche s'en sont très bien sortis, voire avec grande aisance. Mentionnons cependant que tous, bien qu'en ayant fait attention à montrer une double inclusion aux questions (1) et (3), ont conclu trop rapidement la question (4) en montrant seulement une inclusion.

Le second exercice, où le comte Drakul souhaitait estimer le nombre de vampires occupant son château, mélangeait dénombrement (coefficients binomiaux), probabilités finies, et optimisation d'une fonction définie sur les entiers. Tous les candidats ont bien traité cet exercice, mis à part peut-être une confusion entre $m = 32$ et $m = 33$ à la toute fin de l'exercice, et les tous meilleurs ont su expliquer pourquoi m s'appelait le *maximum de vraisemblance* à la grande satisfaction du jury.

Nous avons été enthousiasmés par le niveau des candidats sur cette planche, et en avons profité pour poser quelques petites questions supplémentaires dont :

- Pourquoi m s'appelle le maximum de vraisemblance ?
- Combien de vampires y a-t-il au minimum dans le château ?
- Quelle est la probabilité qu'une matrice 2×2 dont les entrées sont des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $1/2$ i.i.d. soit inversible ?