Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $i \geq 1$ tel que $A^i = 0$. L'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente A est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$.

Soit A une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{R})$. Le but de cet exercice est de montrer que $A^n = 0$. Pour cela, on note k l'indice de nilpotence de A.

(1) Si $k \leq n$, montrer que $A^n = 0$.

On suppose maintenant que $k > n$.

(2) Montrer que $A^{k-1} \neq 0$.

(3) Soit $X \notin \mathrm{Ker}(A^{k-1})$. Que dire de la famille $(X, AX, A^2X, \ldots, A^{k-1}X)$? Conclure que $k \leq n$.

(4) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe des nombres réels $c_1, \ldots, c_{n+1}$ tous différents tels que les matrices $A + c_1B, \ldots, A + c_{n+1}B$ soient toutes nilpotentes. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier pair et soient $X, X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes, indépendantes et de même loi. On suppose que X admet une variance et on note $m = \mathbb{E}[X]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$. Soit $d \geq 1$ un entier pair qui divise n. On considère une partition $B_1, \ldots, B_d$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en sous-ensembles de taille n/d. Autrement dit, on suppose que :

$$B_i \cap B_j = \emptyset \text{ si } i \neq j, \qquad \bigcup_{i=1}^{d} B_i = \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad \mathrm{Card}(B_i) = \frac{n}{d} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq d.$$

Finalement, on pose $Y_i = \frac{d}{n} \sum_{j \in B_i} X_j$ pour tout $1 \leq i \leq d$.

(1) Montrer que pour tout $1 \leq i \leq d$, $\mathbb{E}[Y_i] = m$ et $\mathrm{Var}(Y_i) = \sigma^2 \frac{d}{n}$.

(2) En déduire que pour tout $1 \leq i \leq d$,

$$\mathbb{P}\left(|Y_i - m| > 2e\sigma\sqrt{\frac{d}{n}}\right) \leq \frac{1}{(2e)^2}.$$

Pour une variable aléatoire positive Y admettant une espérance, on pourra utiliser le fait que $\mathbb{P}(Y > t) \leq \frac{1}{t}\mathbb{E}[Y]$ pour tout $t > 0$.

Pour $1 \leq i \leq d$, on considère la variable aléatoire J_i qui vaut 1 si $|Y_i - m| > 2e\sigma\sqrt{\frac{d}{n}}$ et 0 sinon.

(3) Soit $\widehat{m}_d$ une médiane de $\{Y_1, \ldots, Y_d\}$, c'est-à-dire un réel satisfaisant à

$$\mathrm{Card}(\{1 \leq i \leq d : Y_i \leq \widehat{m}_d\}) \geq \frac{d}{2}, \qquad \mathrm{Card}(\{1 \leq i \leq d : Y_i \geq \widehat{m}_d\}) \geq \frac{d}{2}.$$

Montrer que

$$\mathbb{P}\left(|\widehat{m}_d - m| > 2e\sigma\sqrt{\frac{d}{n}}\right) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{d} J_i \geq \frac{d}{2}\right).$$

(4) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(|\widehat{m}_d - m| > 2e\sigma\sqrt{\frac{d}{n}}\right) \leq e^{-d}.$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1.

(1) Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$\ln(x) = \inf_{a \in]0,+\infty[} \left(\frac{x}{a} + \ln(a) - 1 \right).$$

(2) Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$. On suppose que $\int_0^1 f(t)dt = 1$.

(a) Montrer que
$$\int_0^1 f(x) \ln(g(x)) \mathrm{d}x \leq \ln \left(\int_0^1 f(x) g(x) \mathrm{d}x \right).$$

(b) On suppose que $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 1$. Montrer que
$$\int_0^1 f(x) \ln \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) \mathrm{d}x \leq 0.$$

On considère une variable aléatoire X à densité sur $[0,1]$ et on note g une densité de X. Si la variable aléatoire $\ln(g(X))$ admet une espérance, on dit que X admet une entropie et on note
$$H(X) = -\mathbb{E}\left[\ln(g(X))\right],$$
appelée *entropie* de X.

(3) Soit Y une variable aléatoire de densité $g(x) = e^{-cx}$ sur $[0,1]$ (avec $c > 0$). Calculer $H(Y)$.

(4) Soit X une variable aléatoire à densité sur $[0,1]$ avec une densité f continue et strictement positive sur $[0,1]$. On suppose que $\mathbb{E}[X] = 1$. Montrer que
$$H(X) \leq H(Y).$$

Indication. On pourra calculer
$$\int_0^1 f(x) \ln(g(x)) \mathrm{d}x.$$

Exercice 2. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'est pas possible de truquer deux dés indépendants de façon à ce que la somme des points obtenus en les lançant indépendamment suive la loi uniforme sur l'ensemble $\{2, 3, 4, \ldots, 12\}$.

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Pour tout $1 \leq i \leq 6$, on pose $u_i = \mathbb{P}(U = i)$, $v_i = \mathbb{P}(V = i)$ et on suppose que $u_i > 0$ et $v_i > 0$.

(1) Si U et V suivent la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 6\}$, est-ce que $U+V$ suit la loi uniforme sur $\{2, 3, 4, \ldots, 12\}$?

On note $S = U + V$ et on suppose que S suit la loi uniforme sur $\{2, 3, \ldots, 12\}$.

(2) Montrer que $P(x) = \mathbb{E}\left[x^S\right]$ est un polynôme qu'on explicitera.

(3) Démontrer que $\mathbb{E}\left[x^S\right] = \mathbb{E}\left[x^U\right] \cdot \mathbb{E}\left[x^V\right]$.

(4) Démontrer qu'un polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

(5) Aboutir à une contradiction.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1.

(1) Calculer la limite de x^x lorsque $x \to 0$.

(2) Calculer

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{1/n} x^{x+1} \mathrm{d}x.$$

Indication. On pourra écrire $x^{x+1} = x^{x+1} - x + x$.

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ un entier. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on note $p_i = \mathbb{P}(X = i)$ et on suppose que $p_i > 0$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on définit la variable aléatoire Y_i comme suit :

$$Y_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p_i}} & \text{si } X = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Soit $1 \leq i \leq n$. Identifier la loi de Y_i, calculer son espérance et sa variance.

On note m_i l'espérance de Y_i.

(2) Calculer, pour $1 \leq i, j \leq n$ la valeur de $C_{i,j} = \mathbb{E}[(Y_i - m_i)(Y_j - m_j)]$.

On note V le vecteur colonne

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} \\ \vdots \\ \sqrt{p_n} \end{pmatrix}$$

et V^T le vecteur ligne $V^\mathsf{T} = (\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$. On note finalement C la matrice $C = (C_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

(3) Montrer que $C = I_n - VV^\mathsf{T}$, où I_n est la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.

(4) Montrer que $C^2 = C$.

(5) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(C) \oplus \mathrm{Im}(C)$.

(6) Donner une base de $\mathrm{Ker}(C)$.

(7) Montrer que

$$\mathrm{Im}(C) = \left\{ (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n y_i \sqrt{p_i} = 0 \right\}.$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Afin de repérer les infractions au code de la route, la police est équipée de nouveaux radars dont les performances ont pu être longuement éprouvées et validées. Il ressort de la batterie de tests effectués que

— parmi les véhicules dépassant les limites autorisées, le radar détecte les contrevenants dans 90% des cas.

— parmi les véhicules circulant à une vitesse inférieure à la limite, le radar ne détecte rien dans 95% des cas.

On place le radar au bord de la rue Henri Barbusse et les véhicules détectés par le radar reçoivent une contravention. On note p la proportion de véhicules dépassant les limites autorisées sur la rue Henri Barbusse.

(1) Déterminer en fonction de p la proportion de véhicules en infraction parmi ceux ayant reçu une contravention. Pour quelles valeurs de p cette proportion est-elle inférieure à 50% ?

(2) Déterminer en fonction de p la proportion de véhicules en infraction parmi ceux n'ayant pas reçu de contravention. La proportion de véhicules en infraction peut-elle être plus forte parmi les véhicules ne recevant pas de contravention que parmi ceux en ayant reçu une ?

(3) Déterminer la probabilité $f_{N,k}(p)$ que, parmi N véhicules observés, k reçoivent une contravention.

(4) Déterminer la valeur $\widehat{p}_N(k)$ pour laquelle $f_{N,k}$ est maximale.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(x)f(y) \leq f(xy)$ pour tout $x, y \geq 0$ et $f(1) = 1$.

(1) Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

(2) Montrer que $f(x) \geq f(x^{1/n})^n$ pour tout $x > 0$ et $n \geq 1$.

(3) En déduire qu'il existe un nombre réel $p \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq x^p$ pour tout $x \geq 0$.

(4) Montrer que $p \geq 0$.

(5) Montrer que $f(x) = x^p$ pour tout $x \geq 0$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt.$$

(2) Montrer que F est dérivable et que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On suppose que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

(3) Soit $y_0 \in \mathbb{R}^*$. Montrer que
$$f(x) = \frac{1}{y_0} \left(F(x+y_0) - F(x) - F(y_0)\right).$$

(4) Montrer que f est dérivable.

(5) Montrer que f est une fonction affine.

Exercice 2. Soit $n \geq 3$ un entier et $p_n \in [0,1]$. Par définition, une arête est un ensemble de la forme $\{i,j\}$ avec $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $i \neq j$; un triangle est un ensemble de la forme $\{i,j,k\}$ avec $i,j,k \in \{1,\ldots,n\}$ et où i,j,k sont deux à deux différents.

(1) Combien y a-t-il d'arêtes dans $\{1,\ldots,n\}$? Combien y a-t-il de triangles ?

On note A l'ensemble des arêtes et T l'ensemble des triangles. On considère des variables aléatoires $(X_e)_{e\in A}$ indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p_n. Si $X_e = 1$, on colorie l'arête e, et si $X_e = 0$, on ne colorie pas l'arête e. On dit qu'un triangle $t = \{i,j,k\}$ est colorié si ses trois arêtes $\{i,j\}$, $\{j,k\}$ et $\{i,k\}$ sont coloriées. On note N_n le nombre de triangles coloriés.

Pour tout triangle t, on considère la variable aléatoire I_t qui vaut 1 si t est colorié et 0 sinon.

(2) Calculer $\mathbb{E}[I_t]$ et $\mathrm{Var}(I_t)$ pour tout triangle t.

(3) En remarquant que $N_n = \sum_{t\in T} I_t$, calculer $\mathbb{E}[N_n]$.

(4) On suppose que $n \cdot p_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que $\mathbb{P}(N_n = 0) \to 1$.
Indication : on commencera par montrer que, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance, $\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}[X]$.

(5) Soit X une variable aléatoire positive qui admet une variance et telle que $\mathbb{E}[X] > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]^2}$.
Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, qui assure que si X est une variable aléatoire réelle qui admet une variance, alors $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\epsilon^2}$ pour tout $\epsilon > 0$.

(6) Montrer que le nombre de manières de choisir deux triangles (t_1, t_2) tels que t_1 et t_2 ont exactement une arête en commun vaut $12\binom{n}{4}$.

(7) Montrer que, si t et t' sont deux triangles qui partagent une seule arête commune, alors $\mathrm{Cov}(I_t, I_{t'}) \leq p_n^5$.

(8) On suppose que $n \cdot p_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que $\mathbb{P}(N_n = 0) \to 0$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1.

(1) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable pour tout $b \in \mathbb{R}$.

(2) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

(3) Soit $p \in]0,1[$. Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(A=1) = \mathbb{P}(B=1) = p$ et $\mathbb{P}(A=-1) = \mathbb{P}(B=-1) = 1-p$. Notons $V_1 \leq V_2$ les deux valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$. Est-ce que V_1 et V_2 peuvent être indépendantes ?

Exercice 2. Pour tous entiers $a, b \geq 1$, on définit le polynôme $P_{a,b}(X) = X^{a-1}(1-X)^{b-1}$ et on pose

$$I_{a,b} = \int_0^1 P_{a,b}(x)\mathrm{d}x.$$

(1) (a) Calculer $I_{a,1}$.

(b) Exprimer $I_{a,b}$ en fonction de $I_{a+1,b-1}$ pour $a \geq 1$ et $b \geq 2$.

(c) En déduire que $I_{a,b} = \frac{(a-1)!\cdot(b-1)!}{(a+b-1)!}$.

Soit $B_{a,b}$ une variable aléatoire dont la densité sur $[0,1]$ est égale à $f_{a,b}(x) = \frac{1}{I_{a,b}} P_{a,b}(x)$.

(2) Montrer que $B_{a,b}$ admet une espérance $E_{a,b}$ et une variance $V_{a,b}$, et calculer $E_{a,b}$, $V_{a,b}$.

Soit $L > 0$ et soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ pour tout $x, y \in [0,1]$.

(3) Démontrer que $\mathbb{E}[Y]^2 \leq \mathbb{E}[Y^2]$ pour toute variable aléatoire réelle Y qui admet un moment d'ordre deux.

(4) Montrer que

$$|f(E_{a,b}) - \mathbb{E}[f(B_{a,b})]| \leq L\sqrt{V_{a,b}}.$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $m \geq 1$ un entier. On considère une suite de variables aléatoires $(U_i)_{i\geq 1}$ indépendantes et de loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, m\}$. On note

$$J = \min\{i \geq 1 : U_i \neq U_{i+1}\}.$$

(1) Trouver la loi de J.

On considère maintenant une suite $(J_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi que J. On note

$$M_n = \max(J_1, \ldots, J_n).$$

(2) Montrer que $\mathbb{P}\left(M_n \leq k\right) = \left(1 - \frac{1}{m^k}\right)^n$ pour tout entier $k \geq 1$.

(3) Calculer la limite de $\mathbb{P}\left(M_{m^k} = k\right)$ lorsque $k \to \infty$.

Exercice 2. Soient $n, p \geq 1$ deux entiers. Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ à n lignes et p colonnes, on note $M^\top$ la matrice à p lignes et n colonnes dont le coefficient placé à la ligne i et à la colonne j vaut $m_{j,i}$.

(1) Donner les dimensions de la matrice $M^\top M$.

(2) Montrer que $\dim(\mathrm{Im}(M)) = p$ si et seulement $\mathrm{Ker}(M) = \{0\}$.

(3) Montrer que, pour tout vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^p$, on a $X^\top X = 0$ si et seulement si $X = \mathbf{0}$ (où $\mathbf{0}$ désigne le vecteur colonne nul de $\mathbb{R}^p$).

(4) Montrer que, pour tout vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^p$, on a $X^\top M^\top = (MX)^\top$.

(5) On suppose que $M^\top M$ est inversible. Montrer que $P = M(M^\top M)^{-1}M^\top$ vérifie $P^2 = P$.

(6) Montrer que $\dim(\mathrm{Im}(M)) = p$ si et seulement si $M^\top M$ est un isomorphisme. À quelle condition sur n et p une telle situation peut-elle se produire ?

(7) On suppose que $\dim(\mathrm{Im}(M)) = p$. Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(M^\top) \oplus \mathrm{Im}(M)$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Le bijoutier du rez-de-chaussée a placé trois perles de la plus belle eau dans un petit écrin. Chaque soir, Arsène se glisse entre les barreaux du soupirail de l'arrière boutique, puis subtilise au hasard (indépendamment des autres soirs) une perle qu'il remplace par une fausse. Il réitère l'opération jusqu'à ce qu'il ait volé les trois perles précieuses.

On considère les évènements A_n : ≪ il reste exactement deux vraies perles précieuses après le n-ième passage d'Arsène ≫, de probabilité p_n, et B_n : ≪ il reste exactement une vraie perle précieuse après le n-ième passage d'Arsène ≫, de probabilité q_n.

(1) Calculer p_1, q_1, p_2, q_2.

(2) Trouver la valeur de p_n.

(3) Trouver la valeur de q_n.

(4) Calculer la probabilité qu'Arsène ait volé les trois perles précieuses au bout d'exactement n passages.

Exercice 2. Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (avec $k \geq 1$), on appelle maximiseur de g, quand il en existe, tout point $x_0 \in \mathbb{R}^k$ tel que $g(x_0) \geq \sup_{x\in\mathbb{R}^k} g(x)$; on dit aussi que x_0 maximise g.

On considère la fonction

$$F(m,s) = \frac{1}{s} e^{-\frac{m^2+(m-2)^2}{2s}}.$$

(1) Donner le domaine de définition D de F.

(2) Montrer qu'un point (m_0, s_0) maximise F si et seulement si il maximise aussi $\ln(F)$.

(3) Déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial \ln(F)}{\partial m}(m,s)$ et $\frac{\partial \ln(F)}{\partial s}(m,s)$.

(4) Montrer que, quelle que soit la valeur de $s \in \mathbb{R}_+^*$, $m_0 = 1$ est l'unique maximiseur de la fonction $m \mapsto F(m,s)$.

(5) Montrer que la fonction $s \mapsto F(m_0, s)$ admet un unique maximiseur s_0, et calculer s_0.

(6) Montrer que, pour tout $(m,s) \in D$,

$$(m,s) \neq (m_0,s_0) \quad \Longrightarrow \quad F(m,s) < F(m_0,s_0).$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1.

(1) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n).$$

(2) Soit $\lambda < 1$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\lambda}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$

(3) Trouver tous les nombres réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^{\beta} \qquad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

Exercice 2. Soient a et b deux nombres entiers strictement positifs. Le but de cet exercice est de montrer que, si la quantité $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ est un nombre entier, alors c'est un carré parfait, c'est-à-dire qu'il existe un nombre entier p tel que $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = p^2$.

(1) Soient c et d des nombres réels et P le polynôme $P(x) = x^2 + cx + d$. On suppose qu'il existe un nombre réel u tel que $P(u) = 0$. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = (x-u)(x-v)$, puis exprimer c et d en fonction de u et de v.

On fixe deux entiers strictement positifs a et b tels que $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ soit un nombre entier.

(2) Donner un exemple de tels entiers.

On pose $k = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$, et on considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des couples (u, v) d'entiers positifs qui ne sont pas tous les deux nuls et tels que $k = \frac{u^2+v^2}{uv+1}$.

(3) Montrer que si $(a, 0) \in \mathcal{S}$ alors k est un carré parfait.

On raisonne par l'absurde et on suppose que k n'est pas un carré parfait. Parmi tous les couples (u, v) de $\mathcal{S}$, on en choisit un qui minimise la quantité $u + v$, et on le note (U, V). On suppose que $U \geq V > 0$.

(4) On considère l'équation $\mathcal{E} : \frac{x^2+V^2}{xV+1} = k$ d'inconnue x. Montrer que $x = U$ est solution de $\mathcal{E}$.

(5) Montrer que $\mathcal{E}$ admet une autre solution réelle qu'on note y, et que

$$y = kV - U = \frac{V^2 - k}{U}.$$

(6) Montrer que y est un entier et que $y < V$. Aboutir à une contradiction et conclure.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Pour un entier $n \geq 3$, on considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$x = n\ln(x).$$

(1) On pose $f_n(x) = x - n\ln(x)$. Dresser le tableau de variations de f_n et esquisser son graphe.

(2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note u_n la plus petite solution de $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(3) Montrer que (u_n) est décroissante.

(4) Montrer que u_n converge vers 1.

(5) On pose $u_n = 1 + v_n$. Montrer que $v_n \sim \frac{1}{n}$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2. Soient $m \geq 1$ un nombre entier. On pose $E = \{1, 2, \ldots, m\}$. Si A est un sous-ensemble de E, on note $\mathrm{Card}(A)$ le nombre d'éléments de A. Soit X un sous-ensemble de E choisi uniformément au hasard parmi tous les sous-ensembles de E.

(1) Combien y a-t-il de sous-ensembles de E ?

Si A est un sous-ensemble de E, on note $V^A = (V_1^A, V_2^A, \ldots, V_m^A)$ le vecteur défini par

$$\text{pour tout } 1 \leq i \leq m, \qquad V_i^A = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in A \\ 0 & \text{si } i \notin A. \end{cases}$$

(2) Pour $1 \leq k \leq m$, calculer $\mathbb{P}\left(V_k^X = 1\right)$.

(3) Démontrer que les variables aléatoires $(V_k^X)_{1\leq k\leq m}$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

(4) En remarquant que $\mathrm{Card}(X) = \sum_{k=1}^m V_k^X$, déterminer la loi de $\mathrm{Card}(X)$. Calculer l'espérance et la variance de $\mathrm{Card}(X)$.

On considère une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.

(5) Déterminer la loi de $\mathrm{Card}(X_1 \cap X_2)$ et de $\mathrm{Card}(X_1 \cup X_2)$.

On suppose à partir de maintenant que $m = 2^n$ pour un entier $n \geq 1$ et on considère $Z_n = \mathrm{Card}(X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n)$.

(6) Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.

(7) Démontrer que pour tout $M > 0$,

$$\mathbb{P}(Z_n \geq M) \leq \frac{2}{M^2}.$$

Pour une variable aléatoire positive Y admettant une espérance, on pourra utiliser le fait que $\mathbb{P}(Y \geq t) \leq \frac{1}{t}\mathbb{E}[Y]$ pour tout $t > 0$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soient E, F, G trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que :

(1) $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

(2) $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g) \iff \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f) = F$.

Exercice 2. Dans cet exercice, on utilise indifféremment les notations $\exp(x)$ et e^x pour la valeur de la fonction exponentielle au point x.

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$e^x = \sup_{a\in\mathbb{R}} \left(e^a x - a e^a + e^a \right).$$

(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\mathrm{d}u = 1$. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$,
$$\exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda u f(u)\mathrm{d}u \right) \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda u} f(u)\mathrm{d}u,$$
sous l'hypothèse que ces deux intégrales convergent.

(3) Soit X une variable aléatoire réelle à densité qui possède une densité continue. On suppose que $e^{\lambda X}$ admet une espérance pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Démontrer que X admet une espérance.

(b) Démontrer que $\mathbb{E}[\lambda X] \leq \ln \mathbb{E}\left[e^{\lambda X}\right]$ pour tout $\lambda > 0$.

Dans la suite, on fixe un entier $n \geq 1$ et on considère des variables aléatoires indépendantes $X, X_1, \ldots, X_n$, de même loi gaussienne centrée réduite.

(4) Vérifier que, pour tous $\lambda, x \in \mathbb{R}$, on a $\lambda x - \frac{x^2}{2} = \frac{\lambda^2}{2} - \frac{(x-\lambda)^2}{2}$. En déduire que
$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda X}\right] = e^{\frac{\lambda^2}{2}}.$$

(5) Montrer que, pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\exp\left(\lambda \max_{1\leq i\leq n} x_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda x_i}.$$

(6) Démontrer que
$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \max_{1\leq i\leq n} X_i \right) \right] \leq n \mathbb{E}\left[e^{\lambda X}\right].$$
On pourra utiliser sans démonstration le fait que, si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires positives qui admettent une espérance, alors $Y_1 + \cdots + Y_n$ admet une espérance et $\mathbb{E}[Y_1 + \cdots + Y_n] = \mathbb{E}[Y_1] + \cdots + \mathbb{E}[Y_n]$.

(7) Démontrer que
$$\mathbb{E}\left[\max_{1\leq i\leq n} X_i \right] \leq \sqrt{2 \ln n}.$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier et $\sigma > 0$. Pour estimer un paramètre inconnu p, supposons qu'on sache construire, pour tout $1 \leq k \leq n$, un intervalle de confiance I_k pour p de niveau $1 - e^{-k}$. Autrement dit, I_k est un intervalle aléatoire tel que

$$\mathbb{P}\left(p \notin I_k\right) \leq e^{-k}.$$

Supposons finalement que la longueur de I_k soit égale à $\sigma\sqrt{k}$.

(1) Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$ on a $\sum_{j=k}^{n} e^{-j} \leq e^{1-k}$.

(2) Montrer que, pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}\left(p \notin \bigcap_{j=k}^{n} I_j\right) \leq e^{1-k}.$$

On définit $\widehat{k}$ comme étant le plus petit entier $k \geq 1$ tel que

$$\bigcap_{j=k}^{n} I_j \neq \emptyset,$$

et on note $\widehat{p}$ un élément de $\bigcap_{j=\widehat{k}}^{n} I_j$.

(3) Si $p \in \bigcap_{j=k}^{n} I_j$, montrer que $\widehat{p} \in I_k$.

(4) Montrer que pour tout nombre réel $0 \leq x < \sqrt{n}$ on a

$$\mathbb{P}\left(|\widehat{p} - p| > \sigma x\right) \leq e^{2-x^2}.$$

Exercice 2. Soit $r \geq 2$ un entier et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ des nombres réels deux à deux distincts. On considère le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\cdots(X - \lambda_r).$$

Si $Q(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, on note $Q'(X) = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}$ son polynôme dérivé.

On suppose qu'il existe un réel c tel que $P(X) = c(X - \lambda_1)P'(X)$.

(1) Démontrer que $c = \frac{1}{r}$.

(2) Démontrer que $P(X) = \frac{(X-\lambda_1)^2 P''(X)}{r(r-1)}$ et aboutir à une contradiction.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On suppose que les différentes valeurs propres de A sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Si $Q(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, la matrice $Q(A)$ est définie par $Q(A) = a_0I_n + a_1A + \cdots + a_nA^n$ (avec I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$).

(3) Montrer que $P(A) = 0$.

(4) Montrer que $P'(A)$ est une matrice inversible.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1.

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par

$$a_0 = x \quad \text{ et, pour tout } n \geq 0 \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \ .$$

(2) Monter qu'il existe un nombre réel $0 < r < 1$ tel que $\frac{2^k}{k} \leq r \cdot \frac{2^{k+1}}{k+1}$ pour tout $k \geq 2$.

(3) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \leq C \cdot \frac{2^n}{n}$$

pour tout $n \geq 1$.

On considère maintenant la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{n+1}$. On pose également $v_n = 2^n u_n$.

(4) Montrer que $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$ et que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ diverge.

(5) On écrit

$$\frac{2^{k+1}}{k} - \frac{2^k}{k-1} = \frac{2^k}{k} + w_k.$$

Que vaut w_k ?

(6) En déduire un équivalent de u_n lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on dit que F est stable par u si $u(x) \in F$ pour tout $x \in F$. Pour tout entier $k \geq 1$, on note u^k l'application $u \circ u \circ \cdots \circ u$ où u apparaît k fois.

Soient $n \geq 1$ un entier et p un projecteur. On suppose que u^n est l'application identité et que $\operatorname{Im} p$ est stable par u. On pose

$$q = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}.$$

(1) Montrer que $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$ et que $p \circ q = q$.

(2) Montrer que $q \circ u = u \circ q$.

(3) Montrer que $q \circ p = p$.

(4) Montrer que q est un projecteur.

(5) Montrer que $\operatorname{Ker} q$ est un supplémentaire de $\operatorname{Im} p$ stable par u.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1.

(1) Soit $\alpha > 0$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}.$$

(2) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 1$.

(3) Montrer que

$$\lim_{\alpha \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} = 0.$$

On suppose maintenant que $\alpha > 1$ et que $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de nombre réels telle que $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ et telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(4) Montrer que les deux séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)^n$ convergent.

(5) Démontrer que $|x^n - y^n| \leq n|x-y|$ pour tous $x, y \in [0,1]$ et pour tout entier $n \geq 1$.

(6) Montrer que

$$\lim_{\alpha \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(a_n + \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)^n - a_n^n \right) = 0.$$

Exercice 2. Soit $(S_i)_{i \geq 0}$ une suite de nombres entiers telle que :

- $S_0 = 0$ et $S_i \geq 0$ pour tout $i \geq 0$,
- $|S_{i+1} - S_i| = 1$ pour tout $i \geq 0$.

(1) Soit $k \geq 0$ un entier. Démontrer que $S_k \leq k$. Que dire si $S_k = k$?

(2) Soit $n \geq 0$ un entier. On définit la suite $(U_k^{(n)})_{k \geq 0}$ par

$$U_0^{(n)} = n, \qquad U_{k+1}^{(n)} = S_{U_k^{(n)}} \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Démontrer que la suite $U_k^{(n)}$ converge lorsque $k \to \infty$ vers une limite notée $U^{(n)}$.

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On suppose que $S_0 = 0$ et $S_k = |X_1 + \cdots + X_k|$ pour tout $k \geq 0$.

(3) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\sup_{n \geq 0} U^{(n)}$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in]0,1[$. On suppose que f est dérivable deux fois, que f'' est continue et que

$$f(a) = 0, \qquad f'(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

On pose

$$m_1 = \inf_{x\in[0,1]} |f'(x)|, \qquad M_2 = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|.$$

(1) Montrer que $m_1 > 0$ et que $M_2 < \infty$.

On fixe maintenant $x_0 \in [0,1]$ et on définit récursivement

$$\forall k \geq 0, \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

en supposant que $x_k \in [0,1]$ pour tout $k \geq 1$.

(2) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(x) - \int_a^x f''(s)(s-a)\mathrm{d}s.$$

(3) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x) - (x-a)f'(x)| \leq M_2 \frac{(x-a)^2}{2}.$$

(4) Montrer que, pour tout $k \geq 0$,

$$|x_{k+1} - a| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_k - a|^2.$$

(5) Que dire de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$?

Exercice 2. Pour avoir son diplôme, un étudiant doit réussir les examens des M cours qui sont proposés, et obtenir ainsi les M unités de valeur correspondantes. On suppose que l'étudiant a une probabilité $p \in]0,1[$ de réussir chacun des examens (toutes les tentatives sont supposées indépendantes). D'année en année, l'étudiant peut reporter les unités de valeurs obtenues, et il ne passe alors que les examens qu'il n'a pas réussis.

(1) Pour $1 \leq i \leq M$, notons G_i le nombre d'essais nécessaires pour réussir l'examen du i-ième cours. Quelle est la loi de G_i ?

(2) On note X_n le nombre total d'unités obtenues pendant les n premières années (si $X_n = M$, alors $X_m = M$ pour $m \geq n$). Quelle est la loi de X_n ?

(3) On suppose que l'étudiant ne peut passer les examens qu'au plus pendant 5 ans.
  (a) Quelle est la probabilité que l'étudiant n'obtienne pas son diplôme ?
  (b) Combien d'examens l'étudiant passera-t-il en moyenne ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1.

(1) Montrer que $\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $a_0 \in]-1, 1[$. On définit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ par

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

(2) Justifier qu'il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $a_0 = \cos(\theta)$.

(3) Montrer que $a_n = \cos(\theta/2^n)$.

(4) En déduire un équivalent de $1 - a_n$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Pour tout entier $k \geq 0$, on note $P^{(k)}$ sa dérivée k-ième (avec la convention que $P^{(0)} = P$). Ainsi, $P^{(1)} = \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1}$. On considère également f_P l'application

$$\begin{array}{rccc} f_P : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & Q & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k Q^{(k)} \end{array}$$

(1) Calculer $f_{1+X+2X^2}(1+X^2)$.

(2) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, f_P est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$.

Pour tout entier $k \geq 0$, on définit le polynôme P_k par $P_k(X) = X^k$.

(3) Trouver le noyau de f_{P_2}, l'image de f_{P_2} et les valeurs propres de f_{P_2}.

(4) Montrer que $\mathrm{Ker}(f_P) = \{0\}$ si et seulement si $P(0) \neq 0$.

(5) Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que $\mathrm{Im}(f_P) = \mathbb{R}[X]$.

Indication. On pourra commencer par le cas où $P(0) \neq 0$.

(6) Trouver le noyau de l'application $P \mapsto f_P$.

(7) L'application $P \mapsto f_P$ est-elle un isomorphisme ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels tels que $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. On pose

$$Y = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n.$$

Le but de cet exercice est d'encadrer $\mathbb{E}[|Y|]$.

(1) Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^x$

(2) Calculer $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}\left[Y^2\right]$.

On pose

$$Z = \prod_{k=1}^{n}(1 + ia_kX_k),$$

qui est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{C}$.

(3) Montrer que le module $|Z|$ de Z vérifie

$$|Z| \leq \sqrt{e}.$$

(4) Montrer que $\mathbb{E}[YZ] = i$.

(5) Montrer que $\mathbb{E}[|Y|] \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Indication. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $|\mathbb{E}[YZ]| \leq \mathbb{E}[|YZ|]$.

(6) Montrer que $\mathbb{E}[|Y|] \leq 1$.

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ un entier. Pour tout vecteur $X = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on note

$$F_X = \left\{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} x_iz_i = 0\right\}.$$

(1) Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, F_X est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(2) Démontrer que $\mathbb{R}^n = F_X \oplus \mathrm{Vect}(X)$. Quelle est la dimension de F_X ?

(3) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que $\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$.

Indication : on pourra considérer l'application

$$\begin{array}{rccc} u : & F \times G & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

(4) Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - 1$. Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$, on a $\dim(E \cap H) = \dim(E)$ ou $\dim(E \cap H) = \dim(E) - 1$.

Soient X et Y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

(5) On suppose que X et Y sont liés. Déterminer la dimension de $F_X \cap F_Y$.

(6) On suppose que X et Y sont libres. Déterminer la dimension de $F_X \cap F_Y$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.

(1) On suppose qu'il existe un projecteur p tel que $u = p \circ u - u \circ p$.
   - (a) Montrer que pour tout $x \in \operatorname{Ker} p$ on a $u(x) \in \operatorname{Im} p$.
   - (b) Montrer que $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} u$.
   - (c) Montrer que $u \circ u = 0$.

(2) On suppose que $u \circ u = 0$. Montrer qu'il existe un projecteur p tel que $u = p \circ u - u \circ p$.

Exercice 2.

(1) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $2e^{-x} - 1$ lorsque $x \to 0$.

(2) Lorsque $n \to \infty$, montrer que
$$e^{-2\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1} \right)^n$$
converge vers un nombre réel strictement positif qu'on déterminera.

On s'intéresse à un modèle simple de propagation d'une population, qu'on modélise comme suit.

- Chaque site de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ est occupé soit par un (seul) individu, soit est vide.
- À l'instant $t = 0$, un individu occupe le site 0 et tous les autres sites sont vides.
- Si un individu est à côté d'un site vide, au bout d'un temps aléatoire, indépendant de tout le reste, distribué selon une variable aléatoire géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ (la probabilité que ce temps vaille k est donc $\frac{1}{2^k}$ pour $k \geq 1$), il donne naissance à un individu qui va occuper ce site vide.

On note T_n le premier temps où un individu occupe le site n. Soit $a > \frac{1}{2}$. Le but de cet exercice est d'étudier le comportement asymptotique de $\mathbb{P}(T_n \geq 2n + n^a)$ lorsque $n \to \infty$.

(3) Justifier qu'on peut écrire $T_n = G_1 + \cdots + G_n$, où les variables aléatoires $G_1, \ldots, G_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et géométriques de paramètre $\frac{1}{2}$.

(4)
   - (a) Montrer que pour tout $x < \ln(2)$ la variable aléatoire e^{xG_1} admet une espérance et la calculer.
   - (b) Montrer que pour tout $x < \ln(2)$ la variable aléatoire e^{xT_n} admet une espérance et la calculer.

(5)
   - (a) Montrer que pour tout $0 < x < \ln(2)$ et $y > 0$ on a
$$\mathbb{P}(T_n > y) \leq e^{-xy} \cdot \mathbb{E}\left[e^{xT_n}\right].$$
Pour toute variable aléatoire positive X qui admet une espérance, on pourra utiliser le fait que pour tout $t > 0$, on a $\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{1}{t}\mathbb{E}[X]$.
   - (b) Montrer que
$$\mathbb{P}(T_n \geq 2n + n^a) \leq e^{-n^{a-1/2}} e^{-2\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1} \right)^n.$$
   - (c) La série de terme général $\mathbb{P}(T_n \geq 2n + n^a)$ converge-t-elle ?