

**RAPPORT SUR L'ÉPREUVE ÉCRITE DE
COMMENTAIRE DE DOCUMENT
Session 2008**

Le texte choisi pour cette session 2008 est signé par le mathématicien britannique Sir Roger PENROSE (Colchester, 8 août 1931 -), actuellement *Emeritus Rouse Ball Professor of Mathematics* au *Mathematical Institute* de l'Université de Cambridge. Il est tiré de son dernier ouvrage intitulé, dans sa version française : *À la découverte des lois de l'Univers. La prodigieuse histoire des mathématiques et de la physique* [2004], Paris, Odile Jacob, 2007, tr. fr. de Céline Laroche, p. 16-17.

Dans cet ouvrage de plus de 1100 pages, les 350 premières sont consacrées aux mathématiques dont est précisément extrait le passage choisi que son auteur a intitulé : *Trois Mondes et trois profonds mystères*.

Ce fragment, assez bref, est tout simplement découpé en trois parties, chacune étant consacrée à l'un de ces « trois Mondes mystérieux » dont il s'agit de questionner non seulement l'*existence*, mais également le type de *relations* qu'ils entretiennent deux à deux.

La grande particularité de ce développement analytique et linéaire tient dans une « illustration » figurale et diagrammatique, insérée dans le fragment, qui caractérise assez bien le *style* (de) *Penrose*. C'est ici l'une des raisons du choix de ce texte-là. Sir Roger PENROSE s'est très tôt illustré (1962) dans le champ physico-mathématique par la construction de ce qu'on appelle en cosmologie les « diagrammes de PENROSE » ou « diagrammes conformes de CARTER-PENROSE ». Plus profondément encore, ses travaux mathématiques consacrés aux concepts de *tenseurs*, de *spineurs* et de *twisters*, l'ont conduit à proposer une *notation diagrammatique* utilisable en géométrie différentielle, sous forme d'une combinatoire figurale de diagrammes proche de celle usitée en théorie mathématique des *nœuds*¹. Ces diagrammes notationnels représentent en quelque sorte les caractères en lesquels s'écrit le « grand livre de la nature », et ils sont périodiquement repris dans *À la découverte des lois de l'Univers* pour réécrire les résultats mathématiques obtenus dans l'ensemble de l'ouvrage.

¹. Cf. Roger PENROSE & Wolfgang RINDLER, *Spinors and Space-Time. Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*, Cambridge University Press, 1987 (Appendice).

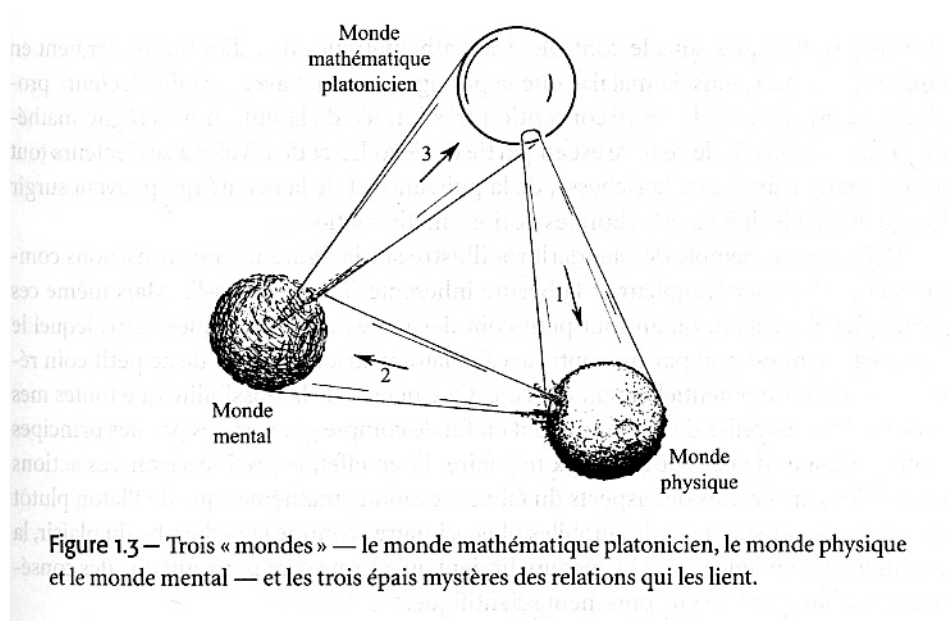
Dès lors, la prise en compte par les candidats des deux figures proposées au concours (dont l'une à caractère optionnel) n'aurait pas dû apparaître comme un luxe ou une considération secondaire, surtout de la part de candidats scientifiques.

1. Dès la première phrase, PENROSE pose la singularité de l'existence mathématique par rapport à ce qu'on définit comme « existence *physique* » et « existence *mentale* ». On sait que pour la plupart des mathématiciens, cette question de l'*existence mathématique* se pose en termes « platoniciens ». PENROSE défend une vision platonicienne des Mathématiques, rejoignant, sur le fond, les positions similaires d'autres mathématiciens contemporains comme Alain Connes². Il exprime sans ambiguïté son point de vue, par exemple dans *L'esprit, l'ordinateur et les lois de la physique* : « J'imagine que chaque fois que l'esprit perçoit une idée mathématique, il prend contact avec le Monde platonicien des idées [...] Quand nous "voyons" une idée mathématique, notre conscience pénètre dans ce Monde des idées et prend directement contact avec lui. » Cette question prend la forme suivante : « Le Monde mathématique de Platon est-il "réel" ? » qui n'est autre que la question de l'*existence* du Monde platonicien. Et ce que PENROSE entend par cette « existence », c'est tout simplement l'objectivité de la *vérité mathématique*. L'existence platonicienne fait ainsi référence à l'existence d'une norme extérieure objective, indépendante de nos opinions subjectives ou de notre culture. Les énoncés mathématiques qui peuvent appartenir au Monde de Platon sont précisément ceux qui sont *objectivement vrais*. Et pour PENROSE, cette objectivité mathématique constitue l'essence même du platonisme mathématique qui est étendu à l'attribution d'une *existence* aux *structures* mathématiques.

Ce qui caractérise plus précisément cette existence des *formes mathématiques* c'est d'abord une *différence de nature* d'avec l'*existence des objets physiques* ordinaires, tels une chaise ou une table. C'est ensuite une différence de nature d'avec l'*existence mentale*. Ce que questionne ici PENROSE, c'est le mystère d'une « relation profonde et mystérieuse », qui connecte la forme d'existence physique à la forme d'existence mentale, à savoir deux « Mondes » entre eux. Or, le passage à la représentation schématique de la figure 1.3 fait apparaître

². Alain CONNES, Jean-Pierre CHANGEUX, *Matière à penser*, Odile Jacob, Paris, 2007² et Alain Connes, *Triangle de pensées*, éd. Odile Jacob, « Sciences », Paris, 2000.

trois Mondes ou trois formes d'existence distincts : physique, mental et « platoniquement mathématique ».



On notera la surdétermination « platonicienne » de cette représentation des trois Mondes ou des trois « mystères » qui transparait dans leur forme *sphérique* dont on connaît les enjeux jusqu'à Bruno, Copernic, Képler ou Galilée, c'est-à-dire jusqu'à la naissance de la physique moderne appelée *philosophie naturelle*.

2. La suite du texte n'est que le commentaire et l'explicitation en trois points de la figure 3. 1.

2.1. La première liaison prise en considération est celle connectant le Monde mathématique platonicien au Monde physique et qui constitue le *premier* de ces « mystères ». PENROSE commente ici la *projection* diagrammatique du premier Monde (platonicien) sur le second. Le foyer de la projection mathématique n'est qu'une infime partie du Monde des idéalités qui existent pour le mathématicien, mais il projette sa lumière, composée de certaines existences idéelles, sur la *totalité* du deuxième Monde ou *Monde physique*. Ce qui d'une part suppose qu'il n'est d'existence physique *que* mathématisée (cf. la métaphore galiléenne fondatrice de la physique moderne qui renvoie au « grand livre de la nature écrit en caractères mathématiques ») ; ce qui, d'autre part, présuppose une certaine coupure entre le Monde des mathématiques *pures* et de ses formes d'existence,

et les formes d'existence proprement physique. La mathématique n'est pas la physique, bien qu'elles ne puissent désormais subsister l'une sans l'autre : c'est ce qui constitue cette « relation profonde et mystérieuse ».

2. 2. La structure projective mise en place par PENROSE reliant le Monde physique au Monde mental est du même type que précédemment. Il n'est que certaines structures physiques (« le cerveau sain et alerte ») qui peuvent être projetées sur le Monde mental. Mais il semble bien que cette *induction structurale* du Monde mental à partir de certaines lois physiques (pour PENROSE il s'agit essentiellement des lois régissant la physique quantique), bien que *limitée* (elle ne saurait concerner un « bloc de pierre »), s'effectue cependant par projection sur la *totalité* du Monde mental. On remarquera que cette référence à « la pierre [qui] ne pense pas » est une topique qui parcourt la philosophie occidentale tout au long de son histoire (de Platon à Hegel au moins !).

2.3. Enfin, la troisième projection inductive concerne l'application de l'activité mentale à la recherche platonicienne de la vérité mathématique absolue. Cette fois, le foyer mental inductif se réduit à un point car l'homme occupe une part infime de son activité psychique à la recherche mathématique pure ! On pourrait le noter sociologiquement si l'on considère l'importance numérique de la communauté des mathématiciens dans le monde comparée à la communauté des physiciens. On pourrait ici soulever un certain nombre de questions connexes sous-tendues par ce point, jusqu'au sens plus profond qu'il faudrait donner à telle déclaration d'Alain CONNES qui compare le physicien à un « boson » et le mathématicien à un « fermion »...

3. Le dernier point s'intéresse à la dynamique du diagramme et à son mode opératoire. La circulation devra normalement s'opérer « dans le sens des aiguilles d'une montre » afin de saisir le point fondamental quant au passage

d'un monde au suivant : le fait, déjà souligné, d'une relation qui est établie à partir d'une « base » (ou d'un foyer projectif) toujours plus étroite que l'espace où s'opère la projection. Il aurait été intéressant que les candidats s'interrogent sur ce que montrerait une circulation projective opérant en sens inverse des aiguilles d'une montre. On aurait pu y voir, par exemple, comment le champ de la physique peut induire parfois des recherches mathématiques, soit en inaugurant le champ, soit, le plus souvent, en projetant les possibles dont, en aval, le mathématicien se chargera d'affiner la rigueur. On pourrait voir le cas de la fonction δ de Dirac, des « diagrammes de Feynman », les subtilités mathématiques induites par la « théorie des supercordes », ou même, et bien plus tôt, les recherches en géométrie différentielle (théories tensorielles) fondées par Levi-Civita et Luigi Bianchi, théorie qui n'obtiendra ses titres de noblesse mathématique qu'en passant par les théories relativistes d'Einstein.

L'auteur termine enfin son argumentation en pointant ce qui pourrait relever de ses propres « préjugés », c'est-à-dire de sa prise de position philosophique, personnelle et subjective, concernant cette question. Ce préjugé tiendrait ainsi dans le fait d'un *recouvrement total* des trois Mondes dans la relation de chacun avec le monde précédent.

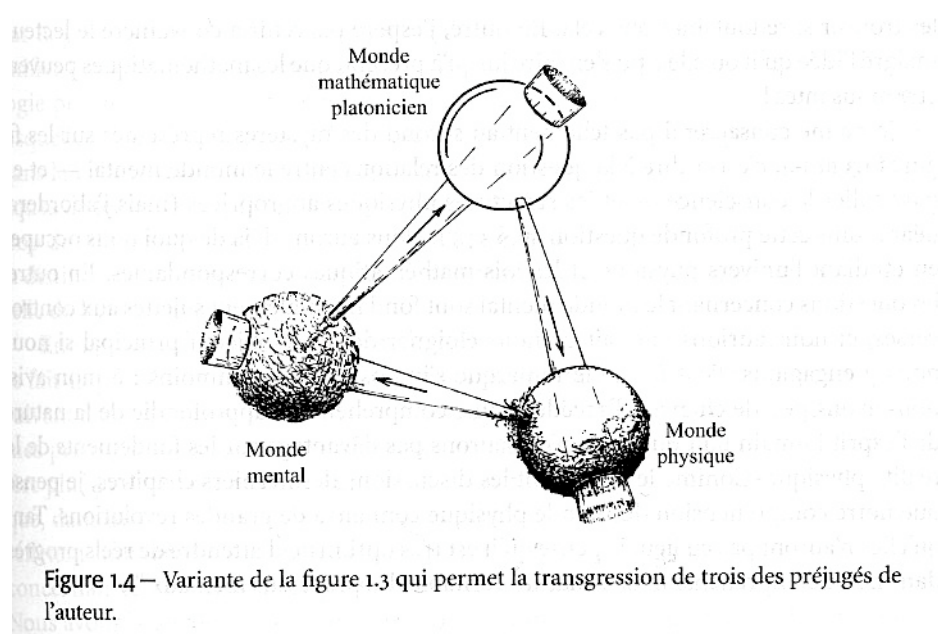
Ainsi, en ce qui concerne la première relation *inductive*, c'est la *totalité* du monde physique qui est décrite comme *régie* par les lois mathématiques. Il y a donc ici une sorte de *règne* du Monde mathématique sur le Monde physique, ce qui ne saurait être « prouvé » au sens strict, mais seulement indiqué tendanciellement, ce « règne » laissant cependant la place à certains comportements aléatoires de nos actions physiques régies néanmoins par des principes probabilistes stricts.

Un deuxième point qui pourrait paraître relever du pur préjugé concerne le fait que dans le diagramme la *totalité* du Monde mental prend sa source dans le Monde physique. Or, il n'existe aucune preuve scientifique raisonnable de l'inexistence d'« esprits » n'ayant aucune incarnation physique.

Le dernier préjugé porte sur une représentation du Monde platonicien comme étant du ressort du Monde mental, ce qui est censé indiquer qu'aucune vérité mathématique n'est, *en principe*, inaccessible à la raison. Or, certains énoncés mathématiques (même « simples ») sont souvent si compliqués que personne n'aurait la vigueur mentale pour en venir à bout. De plus, on pourrait envisager

l'existence éventuelle d'autres énoncés mathématiques qui résideraient *au-delà* de la portée de notre raison, contredisant ainsi le diagramme de la figure 1.3. (allusion pourrait être faite au fameux théorème d'incomplétude de Kurt GÖDEL par exemple). Cependant, plaidant pour la position de PENROSE, on pourra noter qu'un *antiplatonicien* pur et dur, persuadé que les mathématiques sont seulement « dans notre tête », devrait considérer également qu'aucun énoncé mathématique n'est en principe hors de portée de la raison. Ainsi, si le dernier *théorème de Fermat* était (en principe) inaccessible à la raison, alors ce point de vue antiplatonicien n'accorderait aucune validité au fait qu'il soit vrai ou faux, puisque cette conclusion de peut elle-même provenir que de l'action mentale consistant à élaborer une démonstration ou une négation.

Pour finir, PENROSE propose lui-même une variante de la figure 3. 1., un diagramme *alternatif* qui autoriserait la transgression de trois de ses *préjugés*. Que *montre* ce nouveau diagramme redessinant les relations entre les trois Mondes ? D'abord la possibilité que les actions physiques résident *au-delà* du règne mathématique. Ensuite qu'une partie du monde mental ne prend aucunement sa source dans le monde physique. Enfin il autorise l'existence de vrais énoncés mathématiques dont la véracité serait *en preincipe* inaccessible à la raison et à la pensée humaines. C'est une figure plus souple que la figure 1.3 mais qui n'en élimine pas pour autant le caractère « mystérieux » des relations entre les trois Mondes :



- a) l'énigme de la précision extraordinaire avec laquelle les lois mathématiques décrivent notre monde ; b) l'énigme du raffinement et de la beauté des mathématiques ; c) l'énigme de l'émergence de caractéristiques mentales dans certaines organisations de la matière physique ; d) enfin, le mystère de notre *perception* de la vérité mathématique.

Comme l'an dernier, des directives précises et explicites ont été données en début d'épreuve aux candidats :

1) bien prendre soin de lire attentivement le texte à commenter avant de composer (il leur a été accordé, comme l'année dernière, une demi-heure pour d'éventuelles questions en dehors du temps d'épreuve) ;

2) illustrer l'argumentation et la problématique proposées à travers des exemples tirés d'une (ou de plusieurs) discipline(s) scientifique(s) fréquentée(s) par le candidat, cette opération présupposant une explicitation des enjeux théoriques mis en jeu par le texte à commenter.

À noter une singularité : un candidat italien a composé en anglais !

Les notes obtenues par les candidats se sont étalées de 18 à 3. Sur 24 copies, 18 ont obtenu la moyenne (5 copies entre 12, 5/20 et 13/20 ; 13 copies entre 14/20 et 18/20). 4 copies étaient médiocres et 2 copies vraiment nulles (3/20 et 4/20).

Les meilleures notes ont su commenter les diagrammes proposés par PENROSE, dégager la valeur philosophique de ce texte (rapprochements avec Descartes et sa théorie des graphes, Kant, Schelling, Nietzsche, Sartre, Feyerabend, Badiou) et l'illustrer (rapprochements avec les théories de Connes, Chaitin, Grothendieck, De Rham, Smale, Witten).

Enfin, le parallélisme entre les notes obtenues par les candidats aux épreuves de spécialité et celles obtenues à l'épreuve de « commentaire de texte » reste marquant.

Charles Alunni