

Physique

Exercice 1: Propriétés optiques de pigments

Le but du présent problème est de discuter en termes simples et macroscopiques des propriétés optiques des pigments. Un pigment est une substance chimique colorante insoluble dans le milieu qu'elle colore. Afin d'obtenir une peinture, les pigments – sous forme de poudres – sont mis en suspension dans un liant. Du point de vue de la propagation de la lumière un pigment est un milieu trouble. Un tel milieu comprend un liant dans lequel sont dispersés une myriade d'objets de taille non négligeable par rapport à la longueur d'onde de la lumière. Un de ces objets peut soit diffuser la lumière, soit l'absorber. La réflectivité d'une tranche de pigment d'épaisseur L posée sur un substrat (de coefficient de réflectivité R_s) est un problème très difficile à résoudre de manière microscopique car la taille des objets microscopiques composant la poudre leur confère un coefficient de diffusion important. Dans ce qui suit nous allons en proposer une modélisation uni-dimensionnelle (cf figure (1)). L'intensité lumineuse est donnée par deux flux J_- et J_+ qui se propagent respectivement vers le substrat ou dans la direction inverse. Nous supposons que l'absorption de la lumière par les particules pigments est décrite par un coefficient d'absorption K et que la diffusion est donnée par un coefficient β .

Partie I.

Nous donnons la forme générale des équations gouvernant ce modèle pour $0 \leq x \leq L$ (mais attention, les indices + et – des différents flux ont tous été remplacés par ? et seront à reconstituer!):

$$\begin{aligned} \frac{dJ_?}{dx} &= -(K + \beta)J_? + \beta J_? \\ -\frac{dJ_?}{dx} &= -(K + \beta)J_? + \beta J_? \end{aligned} \tag{1}$$

- (1) Ecrivez les équations correctes.
- (2) Expliquez la signification physique des différents termes.
- (3) Donnez les dimensions de K et β .
- (4) Dérivez une équation différentielle pour le rapport $R = J_+/J_-$.

Montrez que cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{dR}{dx} = P(R) \quad (2)$$

où $P(R)$ est un polynôme de 2e degré.

(5) Quelle est la signification physique de R ? Quelle est sa dimension?

(6) Quelle doit être la valeur de $R(x)$ en $x = 0$?

Partie II

Le but de cette partie est de trouver R à la surface de la couche, c'est-à-dire pour $x = L$. On dénotera cette quantité R_L .

(7) Ecrire une équation intégrale qui fasse intervenir R_L et $R(x = 0)$ comme bornes.

NB. Utiliser la technique de séparation des variables!

(8) Intégrer cette équation et montrer que R_L peut s'écrire

$$R_L = \frac{R_\infty^{-1} - R_\infty \frac{R_S - R_\infty^{-1}}{R_S - R_\infty} e^{\beta L(R_\infty^{-1} - R_\infty)}}{1 - \frac{R_S - R_\infty^{-1}}{R_S - R_\infty} e^{\beta L(R_\infty^{-1} - R_\infty)}}. \quad (3)$$

avec $\alpha = K/\beta + 1$ et $R_\infty = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$. (Que vaut R_∞^{-1} ?)

Partie III

(9) Discutez la signification physique de R_∞ .

(10) Tracer R_∞ en fonction de α et interpréter physiquement.

(11) Calculer R_L pour les deux cas suivants:

(a) $R_S = 0$

(b) $R_S = 1$.

(12) A quelles situations physiques les cas (11a) et (11b) correspondent-ils?

(13) Dans les cas (11a) et (11b), laquelle des deux quantités R_L et R_∞ est plus grande?

Partie IV

En réalité, le pouvoir absorbant du pigment dépendra de la fréquence de la lumière, et donc $K = K(\omega)$. Nous supposons que K se comporte comme $K(\omega) = k\sqrt{\omega - \omega_0}$ pour $\omega > \omega_0$ et qu'il s'annule pour $\omega < \omega_0$.

- (14) Quelle situation physique est décrite par un tel comportement?
- (15) Un exemple de pigment rouge est le sulfure de mercure, HgS. Selon vous, quel est l'ordre de grandeur de ω_0 ?
- (16) Une mesure de R_∞ en fonction de la fréquence donne – pour des grandes fréquences ($\omega > \omega_1$) – la dépendance suivante:

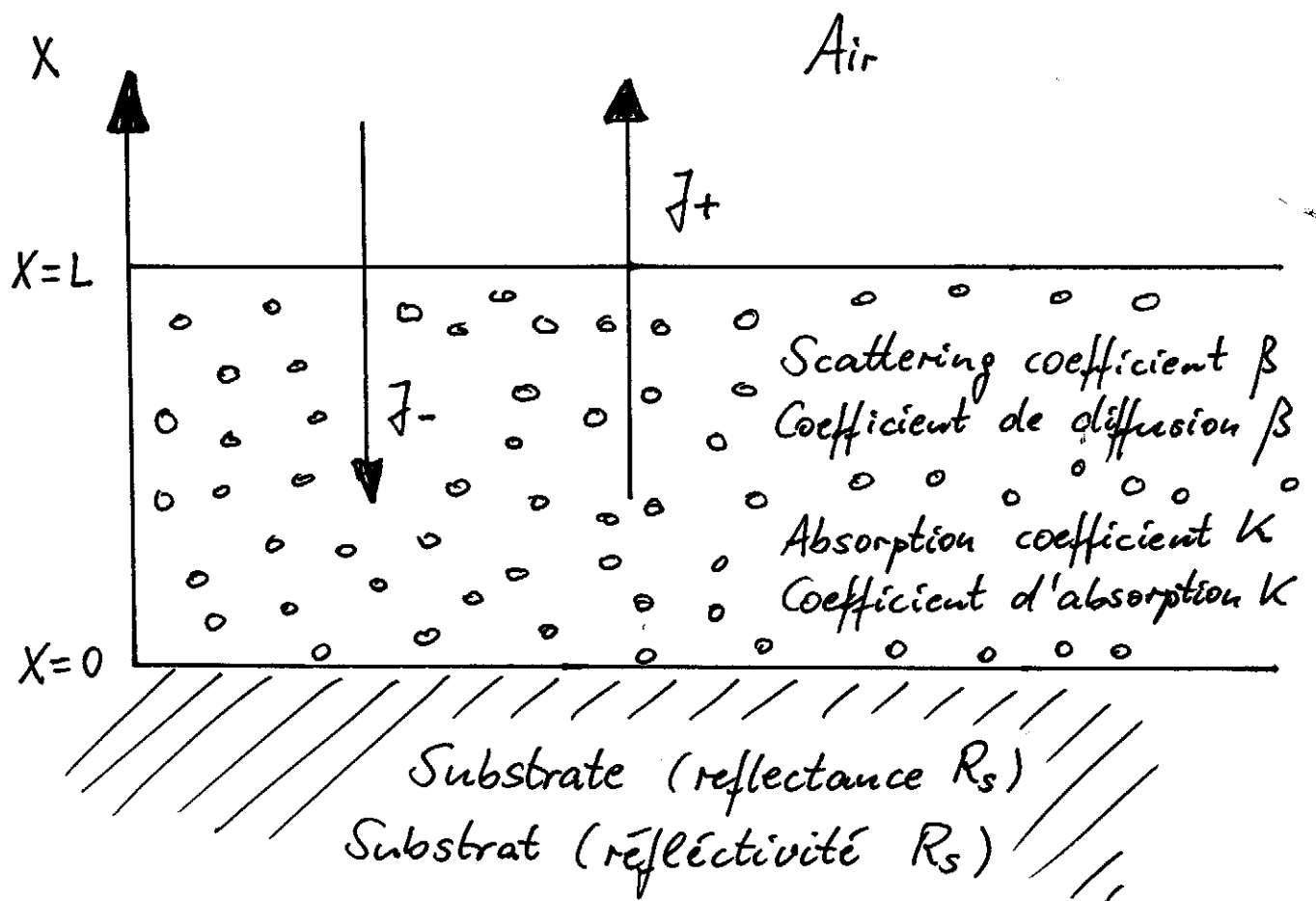
$$R_\infty(\omega) = 1 + C\sqrt{\omega - \omega_1} - \sqrt{(1 + C\sqrt{\omega - \omega_1})^2 - 1} \quad (4)$$

avec des constantes C et ω_1 . Que pouvez-vous conclure pour β et ω_0 ?

- (17) A quoi est-ce que vous vous attendez pour $R_\infty(\omega)$ pour $\omega < \omega_1$? Pourquoi?

Partie V

- (18) Y-a-t-il une notion fondamentale d'optique des ondes qui est absente de la description que nous venons d'élaborer?



Exercice 2 : Mécanique classique

Partie I. Dynamique d'un solide

Considérer un cylindre solide de longueur L , rayon R , et masse M roulant sur un plan incliné sans glisser. L'angle d'inclinaison du plan avec l'horizontale est θ . L'axe du cylindre reste horizontal pendant le mouvement.

1. Calculer le moment d'inertie du cylindre autour de son axe central. Rappel : pour un ensemble de points de masse m_i à une distance r_i de l'axe de rotation, le moment d'inertie est défini comme $\sum_i m_i r_i^2$. Pour un corps solide, il faut prendre la limite continue.
2. Quelles sont les énergies translationnelle et rotationnelle du cylindre ? Exprimer les deux en fonction de M et de la vitesse du centre de masse du cylindre.
3. Quelle est l'énergie potentielle ?
4. Le cylindre est lâché sans vitesse initiale en haut du plan incliné à une hauteur h_0 . En utilisant la conservation de l'énergie, déterminer la vitesse finale quand il arrive en bas.
5. En analysant les forces agissant sur le cylindre, déterminer la position de son centre de masse en fonction du temps, $x(t)$. Utiliser ce résultat pour calculer la vitesse finale du cylindre.

Les équations du mouvement déterminant la trajectoire $x(t)$ du centre de masse du cylindre peuvent être obtenues également en utilisant le formalisme de Lagrange. Le Lagrangien L d'un système est défini comme la différence entre son énergie cinétique et potentielle, $L = T - V$. Il est considéré comme fonction de paires de variables : une variable pour chaque degré de liberté, de concert avec sa dérivée par rapport au temps. Pour le système que nous considérons ici, le Lagrangien L est donc fonction de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$. Les équations du mouvement sont données par l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (0.1)$$

Pour prendre les dérivées $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial \dot{x}}$, x et $\dot{x}$ sont considérées comme des variables indépendantes.

6. Calculer le Lagrangien du système.
7. Déterminer et résoudre l'équation d'Euler-Lagrange.

Partie II. Un système de poulies

Considérer le système de poulies représenté sur la figure 1. Nous allons négliger le frottement et toutes les masses dans le problème sauf celles qui sont indiquées sur la figure. Nous supposerons en plus que la corde ne s'étire pas.

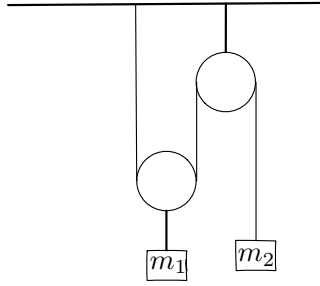


FIGURE 1 – Un système de poulie.

1. Déterminer la trajectoire $x(t)$ du bloc de masse m_1 en considérant les forces agissant sur les deux blocs.
2. Refaire le calcul dans le formalisme Lagrangien (introduit dans le problème précédent).

Partie III. Perles chargées sur des barres

Deux perles de masse m , M et charge q , Q respectivement glissent sans frottement le long de deux barres séparées par une distance d , comme représenté sur la figure 2.

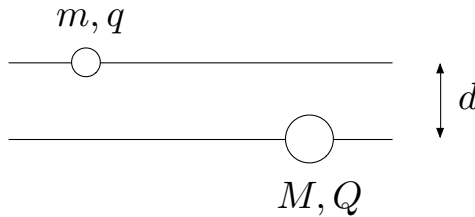


FIGURE 2 – Deux perles chargées.

1. En considérant les forces agissant sur les deux perles, déterminer le système d'équations différentielles gouvernant leur mouvement.
2. Étudier le système dans le formalisme Lagrangien. À noter : le Lagrangien d'un système de plusieurs degrés de liberté est une fonction de plusieurs variables et de leur dérivées temporelles, une paire par degré de liberté. Chaque degré de liberté donne lieu à sa propre équation d'Euler-Lagrange, $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$.
3. Quelle information sur le système peut-on déduire des équations du mouvement ?

Partie IV. Perles reliées par un ressort

Deux perles de masses égales sont reliées par un ressort de constante de rappel k . Elles glissent sans frottement le long de deux barres comme représenté sur la figure 3. Nous supposons que le ressort reste horizontal pendant l'évolution du système.

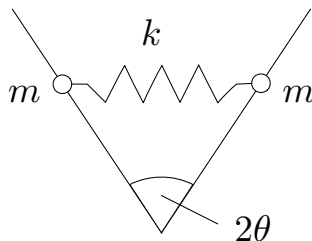


FIGURE 3 – Deux perles reliées par un ressort.

1. En négligeant la pesanteur, déterminer la fréquence d'oscillation du mouvement de deux perles en considérant les forces agissant sur eux.
2. Re-obtenir les équations du mouvement dans le formalisme de Lagrange.
3. Inclure maintenant l'effet de la pesanteur. Quel aspect du mouvement change qualitativement ?

Partie V. Bloc sur plan incliné mobile

Un bloc de masse m glisse sans frottement sur un plan incliné de masse M et d'angle d'inclinaison θ . Le plan est posé sur une surface horizontale sans frottement. Le système est représenté sur la figure 4. Quelle est l'accélération du plan incliné ?

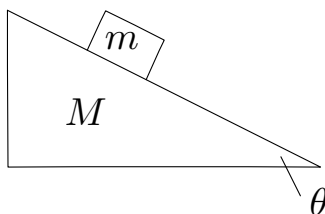


FIGURE 4 – Bloc sur plan incliné.

Partie VI. Deux masses reliées par une corde

Une masse m bouge sans frottement sur une surface. Elle est reliée par une corde à une masse M suspendue comme représenté dans la figure 5. Supposer que la masse M ne puisse bouger que verticalement, et que la corde reste tendue pendant l'évolution du système.

1. Trouver l'équations du mouvement pour les variables r et θ représentées dans la figure. Interpréter les deux équations physiquement.
2. Sous quelle condition le mouvement de m sera-t-il circulaire ? Exprimer le rayon du mouvement en fonction d'une quantité conservée.
3. Quelle est la fréquence des oscillations de faible amplitude (dans la variable r) autour de ce mouvement circulaire ?

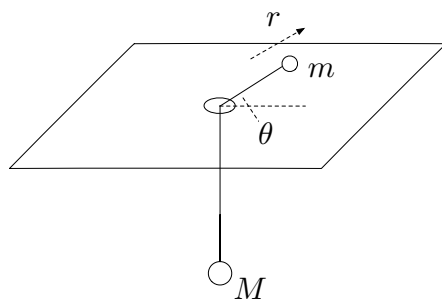


FIGURE 5 – Deux masses reliées par une corde.