

ÉCRIT DE MATHÉMATIQUES (EN SECONDAIRE)

Notation : $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. Soit $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante et telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

On s'intéresse dans les exercices qui suivent aux fonctions $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant le système de conditions suivant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+, & f(x+1) + f(x) = \varphi(x), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

EXERCICE 1 : EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION DE (1).**1. Unicité.**

Soient f et g deux solutions du système (1), c'est-à-dire deux fonctions telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x+1) + f(x) = \varphi(x), \quad g(x+1) + g(x) = \varphi(x),$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer par récurrence sur l'entier n que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = g(x) + (-1)^n (f(x+n) - g(x+n)).$$

(b) En déduire (par un passage à la limite) que $f = g$.

2. Existence.

(a) On admet que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \varphi(x+k)$ converge (dire pourquoi si vous le savez)

et on pose

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi(x) - \varphi(x+1) + \varphi(x+2) - \varphi(x+3) + \varphi(x+4) - \varphi(x+5) + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \varphi(x+k). \end{aligned}$$

Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x+1) + f(x) = \varphi(x).$$

(b) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) - \varphi(x+1) \leq f(x) \leq \varphi(x).$$

(c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et conclure.

EXERCICE 2 : APPLICATION.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$$

avec la convention $0^x = 1$.

1. Montrer que f est bien définie pour $x \in \mathbb{R}_+$.
2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}.$$

4. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}.$$

EXERCICE 3 : DEUXIÈME EXEMPLE.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour n dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , de la forme

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Un polynôme sera noté indifféremment P ou $P(X)$.

1. Etude d'une application linéaire

Notons $e = \exp(1)$ et considérons l'application θ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \theta(P)(X) = \frac{1}{e} P(X+1) + P(X).$$

- (a) Montrer que $\theta: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ est une application linéaire.
- (b) Vérifier que θ préserve le degré, c'est-à-dire vérifie, pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$, $\deg(\theta(P)) = \deg(P)$. En déduire que θ est injective.
- (c) Puisque $\deg(\theta(P)) = \deg(P)$, on peut définir l'application $\theta_n: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ par $\theta_n(P) = \theta(P)$ pour P in $\mathbb{R}_n[X]$. Prover que θ_n est bijective.
- (d) En déduire que pour tout Q dans $\mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\frac{1}{e} P(X+1) + P(X) = Q(X).$$

- (e) Montrer que, si la fonction φ est de la forme $x \mapsto Q(x) \exp(-x)$ où Q est une fonction polynomiale, la solution du système (1) est de la forme $x \mapsto P(x) \exp(-x)$ où P vérifie $\theta(P) = Q$.

2. Exemple.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et notons P_n l'unique polynôme P_n tel que :

$$\frac{1}{e} P_n(X+1) + P_n(X) = X^n,$$

c'est-à-dire tel que $\theta(P_n) = X^n$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

i. Montrer que la dérivée P'_n vérifie

$$P'_n = nP_{n-1}.$$

ii. Exprimer la k -ième dérivée $P_n^{(k)}$ en fonction de P_{n-k} pour $0 \leq k \leq n$.

(b) En utilisant la formule de Taylor montrer que

$$P_n(X+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(X), \quad \text{où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

(c) Montrer que

$$P_n(X) = \frac{e}{e+1} X^n - \frac{1}{e+1} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(X).$$

(d) Expliquer brièvement comment calculer $P_n(x)$ par un algorithme.