Banque Lettres et Sciences Economiques et Sociales

Épreuve écrite de mathématiques 2017

Emilie Kaufmann, Igor Kortchemski

Durée : 4 heures **Calculatrice interdite**

Table des matières

1 Commentaires généraux

Structure du sujet. Le sujet était composé de trois parties indépendantes (un exercice et deux problèmes) permettant d'aborder diverses notions couvrant les trois grands axes du programme. Nous avons porté une attention particulière à la progressivité des questions dans chaque partie pour proposer à tous les candidats des questions abordables sur différents thèmes, avec également des questions de plus en plus difficiles permettant aux meilleurs candidats de se distinguer.

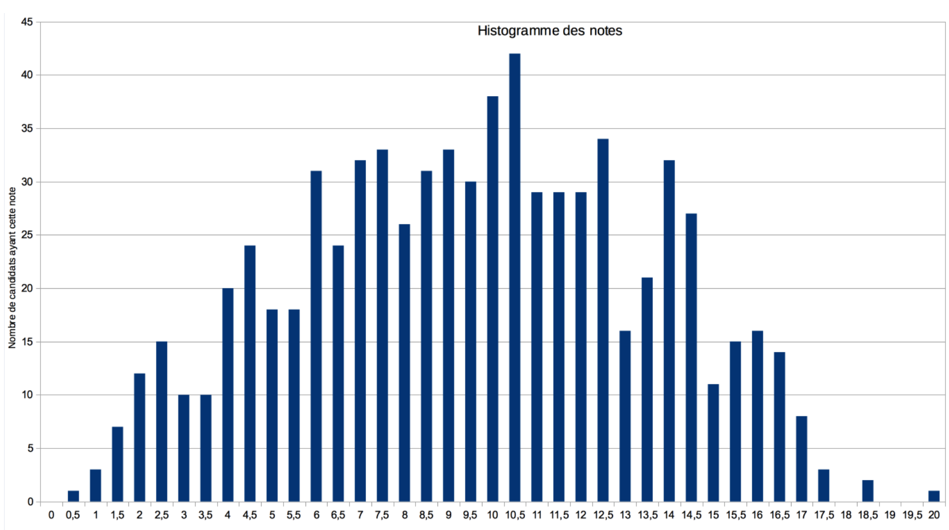

Figure 1 – Histogrammes des notes de l'écrit (745 candidats).

Le premier exercice, mêlant analyse et probabilités discrètes, a permis de toucher aux notions d'analyse réelle, de dérivation, d'étude de fonctions, d'intégrales, de coefficients binomiaux, de loi binomiale et d'indépendance de variables aléatoires. Le but final était d'étudier, lorsque $n \to \infty$, le nombre maximal de balles se trouvant dans une urne, lorsqu'on jette au hasard n balles dans n urnes.

Le premier problème s'intéressait à l'étude d'une suite récurrente de type $u_{n+1} = f(u_n)$, avec une fonction f définie comme une série dont les coefficients sont définis à partir de la loi d'une variable aléatoire discrète. Cette suite intervient dans l'étude de la probabilité d'extinction d'une population (processus de Bienaymé–Galton–Watson). Une sous-partie étudiait l'espérance de certains variables aléatoires continues.

Le deuxième problème portait sur l'algèbre linéaire et étudiait la notion de matrice compagnon d'un polynôme. Après avoir testé la compréhension des candidats de définitions abstraites sur des exemples, ce problème proposait de mettre en oeuvre des méthodes usuelles d'algèbre linéaire. Le but était d'obtenir une condition nécessaire et suffisante sur un polynôme pour que sa matrice compagnon associée soit diagonalisable.

Bilan général. Le sujet a permis de bien classer les candidats, y compris ceux ayant obtenu de faibles notes. La présence de questions simples sur beaucoup d'aspects du programme a récompensé les candidats ayant fourni un investissement minimal en mathématiques. Nous nous réjouissons que les candidats les plus faibles, ayant visiblement complètement abandonné les mathématiques, sont de moins en moins nombreux : il n'y a pas eu de copies vides, et environ 10% des copies obtiennent une note $\leqslant 4/20$, contre 20% l'année dernière.

Nous constatons que le nombre de bonnes copies est en *nette progression* (voir Figure 2 et la comparaison avec 2016 ci-dessous), ce qui est très satisfaisant. Nous encourageons les candidats à continuer leurs efforts en mathématiques.

Les dernières questions de chaque partie, de plus en plus difficiles, ont permis de départager les meilleures copies. Nous demeurons très satisfaits du niveau de ces meilleurs candidats qui, comme chaque année, abordent avec succès un grand nombre de questions et démontrent ainsi leur maîtrise de toutes les parties du programme. Ces excellents candidats feront à coup sûr de brillants élèves en mathématiques dans les écoles de la banque.

Ces dernières années, l'épreuve d'écrit a été adaptée au niveau des candidats. Elle propose davantage de questions simples et guidées dans lesquelles les candidats, même les plus modestes, doivent pouvoir s'exprimer. Ce nouveau format n'empêche aucunement la détection des très bons candidats, mais permet de mieux classer les très bonnes copies comme les plus faibles avec une bonne progression entre ces deux extrêmes, ce qui est important avec l'augmentation du nombre d'écoles dans la banque.

Transformation des notes brutes. Les copies étaient notées cette année sur 258 et la meilleure copie a obtenu une note brute de 200/258, ce qui est très légèrement mieux que les années précédentes (77.5% des points, contre 76.5% en 2016 et 75% en 2015). Si on applique une transformation linéaire aux notes brutes en les divisant par 10 et en arrondissant au demi-point le plus proche, on obtient l'histogramme rouge de la Figure 2.

Afin d'obtenir une courbe de notes, une moyenne, un écart-type et un pourcentage de notes $\geqslant 14/20$ similaire à ceux des autres matières, nous appliquons plutôt une transformation linéaire par morceaux pour obtenir une note finale sur 20 à partir de la note brute sur 258. Un des effets de cette transformation est, malheureusement, de réduire l'écart entre les meilleures copies (mais moins que l'année dernière, comme nous le verrons plus bas). Cependant, l'oral permet de bien départager ces meilleurs candidats.

Insistons sur le fait que cette information est donnée à titre indicative, et il se peut que l'harmonisation effectuée en 2018 soit différente.

Évolution par rapport à 2016. Cette année, nous avons eu 745 candidats (contre 802 l'année dernière). La principale différence par rapport à 2016 (et à toutes les années précédentes !) est l'absence de copies vides, ce dont nous nous réjouissons.

Le choix de la transformation linéaire par morceaux a été guidée par deux volontés :

– Une volonté de récompenser un investissement minimal en mathématiques. La moyenne générale de l'épreuve est ainsi en augmentation (9.5/20 contre 9.0/20 en 2016), même si la moyenne hors 0 reste comparable (9.5/20 contre 9.4/20 en 2016). Ceci explique aussi la forte baisse de l'écart-type (à 4.0 contre 4.8 en 2016). Cependant, l'écart-type des notes $\geqslant 4$ reste du même ordre de grandeur à 3.5 contre 3.7 en 2016 (on voit en particulier que les notes extrêmes entre 0 et 4 jouent un rôle important sur l'écart-type).

– Une volonté de discriminer davantage les bonnes copies et de valoriser les excellents candidats en mathématiques. Ainsi, la moyenne des copies $\geqslant 10/20$ est en baisse à 12.8/20 (contre 13.2/20 en 2016) est la proportion de notes $\geqslant 16$ est en baisse à 6% contre 8.5% l'année dernière.

Pour analyser les performances des candidats sur ce sujet, nous allons plutôt regarder les notes brutes $\boxed{\textbf{\textit{avant}}}$ transformation linéaire par morceaux (c'est-à-dires celles de la Figure 2), qui reflètent davantage le niveau réel des candidats. Tout d'abord, l'épreuve a été mieux réussie cette année (moyenne à 5.9/20 contre 4.3/20 l'année dernière), avec un écart-type quasiment identique à celui de l'année dernière (3.87 contre 3.88 en 2016). Le pourcentage de notes $\leqslant 2$ est en chute libre à 19.5% (contre 39% l'année dernière). Le pourcentage de bonnes notes $\geqslant 10$ est en hausse à 18% (contre 10.5% l'année dernière), mais le pourcentage de très bonnes notes $\geqslant 16$ est en baisse à 0.8% (contre 1.4% l'année dernière). Il est intéressant de constater le niveau des bonnes copies $\geqslant 10$ est plus homogène (écart-type à 2.0 contre 2.6 l'année dernière), alors que les copies $\leqslant 10$ ont un écart type quasiment identique à celui de 2016 (à 2.7).

Comme mentionné précédemment, la transformation linéaire par morceaux réduit l'écart entre les meilleures copies. Cependant, il semble que le sujet de cette année ait permis de l'atténuer. Par exemple, à une note finale de 18/20 correspond en réalité une note brute de 16.5/20 (contre 14.2/20 l'année dernière), et à une note finale de 14/20 correspond en réalité une note brute de 10/20 (contre 8.4/20 l'année dernière). Comme nous l'avons dit, cette transformation provient de la nécessité d'adéquation aux courbes de notes des autres matières.

Table 1 – Éléments statistiques de comparaison entre les épreuves écrites de 2014, 2015, 2016 et 2017. Ces statistiques concernent l'ensemble des candidats inscrits à l'une au moins des écoles de la banque Lettres et Sciences économiques et sociales et présents à l'épreuve de mathématiques. Les copies « vides » sont les copies non blanches mais ayant obtenu la note zéro ; par exemple, celles des candidats s'étant bornés à recopier l'énoncé.

	2014	2015	2016	2017
Candidats présents	708	713	802	745
Copies blanches	4 (0,6%)	5 (0,7%)	11 (1,4%)	0 (0%)
Copies vides	76 (10,7%)	29 (4,1%)	24 (3,0%)	0 (0%)
Notes entre 0 et 1,5	94 (13,3%)	57 (8%)	85 (10,6%)	11 (1,5%)
Notes entre 0,5 et 4,5	76 (10,7%)	131 (18,4%)	138 (17,2%)	102 (13,7%)
Notes entre 10 et 20	311 (43,9%)	316 (44,3%)	371 (46,3%)	397 (53 %)
Notes entre 16 et 20	51 (7,2%)	44 (6,2%)	68 (8,5%)	59 (7,9 %)
Moyenne	8,51	8,9	8,98	9,52
Écart-type	4,83	4,51	4,84	3,94
Médiane	8.5	9	9	9,5
Moyenne hors zéros	9,53	9,12	9,39	9,52
Écart-type hors zéros	4,05	4,34	4,55	3,94
Médiane hors zéros	9	9	9,5	9,5
Moyenne des notes $\geqslant 4$	10,3	10,4	10,53	10,12
Écart-type des notes $\geqslant 4$	3,5	3,4	3,71	3,49
Médiane des notes $\geqslant 4$	10	10	10,5	10

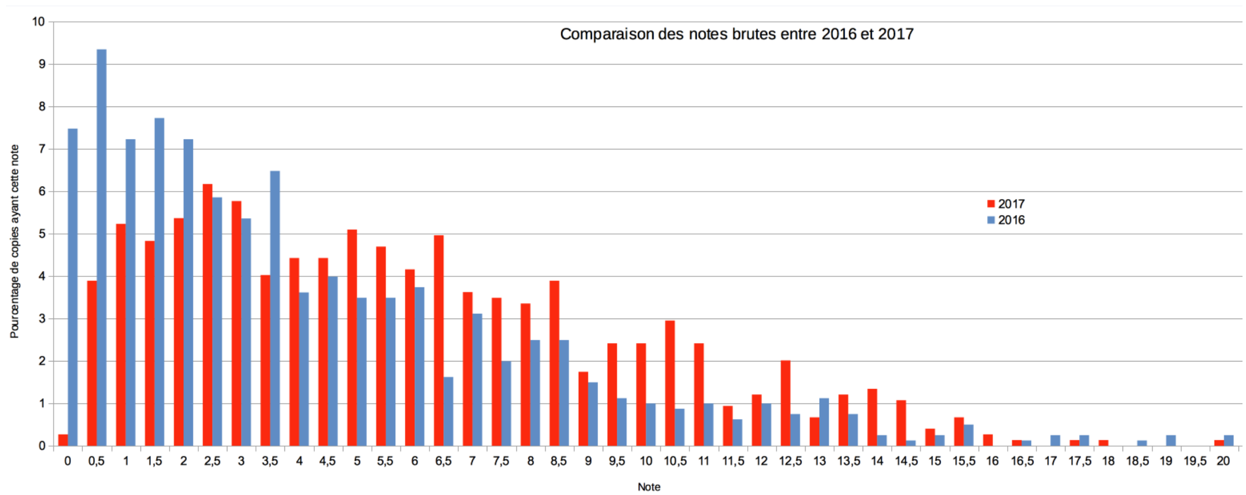

Figure 2 – Comparaison entre 2016 et 2017 des histogrammes des pourcentages de notes de l'écrit qui seraient obtenues par transformation linéaire à partir de la note brute : en bleu, 2016 (la moyenne serait de 4.3/20) et en rouge, 2017 (la moyenne serait de 5.9/20).

Difficulté du sujet. Comme chaque année, nous avons souhaité proposer des questions de difficultés variées sur toutes les thématiques du programme. Nous donnons ici une classification approximative des questions en groupes de difficulté croissante :

(1) Questions de cours, calculs numériques élémentaires, ou combinaison des deux : Exercice (1a)-(1b)-(1c)-(1d)-(1e)-(5a), Problème A (3b)-(3c)-(4)-(7a), Problème B (1a)-(1b)-(4a).

En résolvant ces questions, on obtenait 10/20. En faisant la moitié de ces questions, on obtenait environ 7/20 (comme mentionné précédemment, le barème n'est pas linéaire et les premiers points sont plus faciles à obtenir).

(2) Questions classiques d'application du cours, ou demandant des calculs légèrement plus complexes ou abstraits : Exercice (2)-(3a)-(3b)-(5d), Problème A (2)-(5b)-(6), Problème B (1c)-(1d)-(4b)-(4c)-(5a)-(5b).

En résolvant intégralement les questions de niveau 1–2, on obtenait 14.5/20. En faisant la moitié des questions de niveau 1–2, on obtenait environ 7/20.

(3) Raisonnements courts mais non classiques, ou questions reposant sur la résolution correcte de questions les précédant : Exercice (4a)-(4b)-(5b)-(5c), Problème A (1)-(3a)-(5a)-(5c)-(7b)-(9), Problème B (2a)-(2b)-(2c)-(4d)-(4e)-(6a).

En résolvant intégralement les questions de niveau 1–3, on obtenait 19.5/20. En faisant toutes les questions de niveau 1 et la moitié des questions de niveau 2–3, on obtenait environ 15.5/20.

(4) Raisonnements plus fins et questions difficiles :

Exercice (5e)-(5f), Problème A (8)-(10), Problème B (3)-(6b)-(7a)-(7b).

Cette année encore, aucune question n'a semblé bloquer les candidats en début d'exercice. De nombreuses copies ont tenté avec succès un grand nombre de questions dans les trois parties.

Il est à noter qu'à l'intérieur de chaque partie, les questions n'étaient pas forcément posées par ordre croissant de difficulté : par exemple, les questions Exercice (5d), Problème A (5b)-(7a), Problème B (5a)-(5b) ne sont pas très difficiles, mais les questions Exercice (4b), Problème A (1)-(3a), Problème B (3) sont plus délicates.

Analyse des questions les plus faciles. Les questions les mieux réussies, dans l'ordre décroissant de réussite sont : Exercice 1 questions (1a) (94% de réussite), (1c) (70% de réussite), (1d) (63% de réussite), (1b) (60% de réussite), Problème B (1c) (58% de réussite). Dix questions ont eu plus de 50% de réussite. On peut en déduire que la plupart des candidats maîtrisent les notions les plus basiques du programme, ce qui est tout à fait satisfaisant.

À l'avenir, nous continuerons autant que possible de proposer des questions élémentaires sur les trois parties du programme et nous encourageons tous les candidats à lire l'énoncé avant de commencer à rédiger leur copies de manière à identifier dès le début de l'épreuve les questions les plus faciles sur lesquelles une rédaction impeccable leur rapportera de nombreux points.

Conclusion. Un travail minimal en mathématiques nous semble toujours très fructueux et nous encourageons les futurs candidats à travailler les notions les plus élémentaires et les calculs de base en profondeur. Ce travail doit leur permettre de reconnaître et de rédiger proprement les questions les plus simples qui ne font appel qu'à une connaissance de base du cours. Comme nous l'avons vu, ce travail permet aisément d'obtenir la note 10/20, ce qui peut éviter l'élimination aux candidats les moins à l'aise en mathématiques.

À l'inverse, il est très difficile, voire impossible de réussir sans cet investissement. Ainsi, parmi les 232 sous-admissibles à l'ÉNS Paris, seulement 5 ont obtenu moins de 8/20, 23 ont eu moins de 10/20. Parmi les 61 admissibles à l'ÉNS Paris, 13 ont eu moins de 13/20 et 28 ont eu au moins 15/20. La moyenne des admissibles à l'ÉNS Paris se situe à 14.4/20. La moyenne des admis à l'ÉNS de Paris se situe à 15.2/20.

2 Conseils aux candidats

Comme chaque année, nous profitons du rapport pour rappeler aux futurs candidats quelques conseils de base pour bien réussir l'épreuve de mathématiques.

Honnêteté. Il est très appréciable de voir les candidats aborder de nombreuses questions. Toutefois, nous rappelons qu'il est immédiat de repérer les copies qui tentent de répondre à une question de façon malhonnête ou de grappiller des points. Ces tentatives de bluff sont particulièrement irritantes et pénalisent ensuite les candidats tout au long de la copie, toute ambiguïté étant ensuite systématiquement interprétée comme une erreur.

Les candidats sont également invités à s'interroger sur la cohérence des résultats annoncés sur leur copie, comme par exemple une probabilité qui tend vers l'infini. Repérer une incohérence permet généralement aux candidats de corriger une erreur. A minima, ceux-ci ont intérêt à la signaler s'ils n'ont pu la corriger. Nous n'hésitons jamais à valoriser une réponse correcte, même très partielle, du moment que ses limites sont clairement identifiées. Au contraire, toute tentative de bluff, réelle ou supposée, fera systématiquement perdre au candidat les points de la question et des points d'honnêteté sur la copie.

En effet, comme les années précédentes, nous avons récompensé les candidats faisant preuve de recul et d'honnêteté, en ajoutant au barème initial quelques points (autant que pour une question de difficulté moyenne) attribués uniquement en fonction de l'honnêteté et l'absence d'incohérences manifestes au sein de la copie. Ceci nous permet de mettre en avant les copies s'attachant à démontrer rigoureusement tout résultat présenté, même les plus modestes, par rapport aux copies racontant longuement des raisonnements obscurs dans l'espoir que nous cherchions le bon argument au milieu d'une longue liste sans intérêt. Recopier une question de l'énoncé ne peut jamais rapporter de point et demeure parfaitement inutile.

Rédaction. L'épreuve de mathématiques exige rigueur et précision, il est parfaitement inutile et même néfaste de tenter de répondre à un grand nombre de questions si on ne soigne pas la rédaction. Quasiment toutes les questions peuvent être traitées en utilisant un ou parfois deux arguments très courts. La rédaction des questions élémentaires, de plus en plus nombreuses, joue un rôle important dans la notation, qui favorise largement les candidats répondant de manière impeccable à quelques questions par rapport à ceux essayant à tout prix de traiter toutes les questions sans jamais le faire proprement.

Ainsi, la multiplication des questions élémentaires doit inviter les candidats les plus modestes à accorder davantage de temps à ces questions de base qu'aux questions plus avancées des exercices. Il est toujours beaucoup plus difficile de récupérer des points sur les questions plus délicates qui exigent souvent d'avoir bien compris les notations du sujet et les questions précédentes.

Nous détaillons les principales attentes du jury quant à la rédaction de l'épreuve écrite et indiquons des erreurs courantes qu'il convient d'éviter. Une réponse bien rédigée doit montrer *sans ambiguïté* au jury que le candidat a trouvé une démonstration *complète*, *concise*, *sans argument erroné*, n'utilisant *que des résultats au programme* et *répondant bien à la question posée*.

(1) Ambiguïté et/ou démonstration incomplète : un candidat perdra systématiquement des points en laissant floue une partie de son raisonnement, ne serait-ce que parce qu'il se trouve toujours une dizaine d'autres copies levant la même ambiguïté avec un argument totalement faux. Ainsi, à la question (4a) de l'Exercice, plusieurs candidats écrivent que $n(n-1)\cdots(n-k+1) \leqslant n^k$ sans aucune justification, et ont été sanctionnés. À la question (1d) du Problème B, les candidats écrivant seulement « C_R a deux valeurs propres distinctes donc est diagonalisable » ont perdu une partie des points. Il est très important en mathématiques de savoir ce que l'on fait, quitte à ne proposer qu'une réponse partielle.

Il est indispensable de mentionner tous les arguments dans la résolution d'une question de base. Par exemple, à la question (1c) de l'Exercice, nous avons pénalisé les candidats qui ne justifiaient pas que la fonction était dérivable, ou continue à la question (2) de l'Exercice.

De plus, il faut *toujours* mentionner un résultat prouvé dans une question précédente lorsqu'on l'utilise. Par exemple, pour la question (2b) du Problème B, les candidats qui ont écrit des équivalences sans justifications ni appel à la question (2a) ont été sanctionnés.

Nous avons pénalisé les copies tentant manifestement de grappiller des points en écrivant des assertions non justifiées et souvent fausses dans les questions plus difficiles.

(2) Démonstration concise : la plupart des questions de l'épreuve peuvent se résoudre à l'aide d'un argument très court. Nous valorisons toujours les candidats capables de mettre cet argument en évidence par rapport à ceux qui le délayent dans une suite de calculs ou de phrases sans intérêt. Par exemple, à la question (5b) de l'Exercice il suffisait de dire que $0 = \mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = n) \neq \mathbb{P}(X_1 = n)\,\mathbb{P}(X_2 = n)$.

(3) Arguments erronés : pire, énoncer une affirmation manifestement fausse ne peut pas servir le candidat, mais seulement jeter la suspicion sur tout ce qu'il écrit. Par exemple, écrire que $\ln(x) = o(x)$ lorsque $x \to 0$ au début de l'Exercice met en alerte le jury.

(4) Rédaction et sténographie : nous avons apprécié la disparition quasi-complète de signes cabalistiques ou notations non-standard, nous encourageons vivement les futurs candidats à poursuivre cet effort.

(5) Orthographe, erreurs de calculs : même en mathématiques, il est nécessaire de relire sa copie avant de la rendre de manière à éviter d'y laisser des fautes d'orthographe ou de calcul grossières.

(6) Nous insistons à nouveau sur la présentation de la copie et la lisibilité de l'écriture. Nous avons cette année encore eu beaucoup de mal à déchiffrer certaines copies et probablement pénalisé des candidats croyant sans doute gagner un peu de temps en les négligeant.

Forme. Il est souhaitable de présenter sa copie le plus clairement possible. En particulier, le jury apprécie que les réponses à un même exercice soient présentées dans l'ordre, et qu'en tous cas les éléments de réponse à une même question soient rassemblés en un seul endroit, sauf mention explicite du contraire. Nous sommes heureux de constater les efforts de la plupart des copies qui les rendent agréables à lire.

3 Erreurs les plus fréquentes

Nous signalons ici quelques erreurs ou confusions commises dans plusieurs copies :

- En algèbre linéaire, un nombre non négligeable de candidats pensent qu'échanger des lignes et des colonnes transforme une matrice en une matrice semblable, ayant en particulier les mêmes valeurs propres. Ceci doit provenir d'une confusion avec le fait qu'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes ne change pas l'inversibilité (ce qui est utile pour trouver les λ tels que $A - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas inversible), mais change en général les valeurs propres.
- Plusieurs candidats parlent de « rang » d'une matrice au lieu de sa taille. Enfin, dans la question (2a) du Problème B, le théorème du rang a souvent été écrit avec $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Le critère de comparaison pour la convergence des intégrales pose de nombreuses difficultés. Le signe de la fonction considérée n'est quasiment jamais mentionné, et dans le cas d'une comparaison avec $\frac{1}{x^\alpha}$, de nombreux candidats confondent le critère en 0 et en ∞.

– Le maniement des inégalités a posé des difficultés à de nombreux candidats. À la question (4a) de l'Exercice, nous avons lu de nombreuses fois (même dans des bonnes copies) que $k! \leqslant k^k$ et donc que $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{k^k}$.

– En probabilités, des formules qui n'ont aucun sens comme par exemple « $\mathbb{P}(X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n) = \mathbb{P}(X_1)\mathbb{P}(X_2)\cdots\mathbb{P}(X_n)$ » pour des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont trop nombreuses. Comme l'année dernière, de nombreux candidats font la confusion entre variables aléatoires discrètes et variables aléatoires continues dans l'application du théorème de transfert. De trop nombreux candidats ont pensé que la variable aléatoire V_n dans la question (5) du problème A était discrète.

– Les raisonnements commençant par « sous réserve d'existence » ou « si la variable aléatoire admet une espérance, celle-ci vaut [...] » sont périlleux et mènent souvent à des erreurs (surtout dans le cas des variables aléatoires de signe non constant). De même qu'il est souvent plus sage de montrer une double implication que de raisonner par équivalences, nous conseillons aux candidats de d'abord vérifier qu'une variable aléatoire admet une espérance avant de la calculer.

– Les candidats peuvent parfois être amenés à démontrer des résultats qu'ils auront vu pendant l'année afin de vérifier leur assimilation du cours. Dans ce cas, une justification de type « c'est un résultat du cours » est à proscrire.

4 Commentaires détaillés sur chaque exercice

Comme les années précédentes, en vue de préciser notre analyse des principales faiblesses observées dans les copies, nous indiquons pour chaque question le nombre de copies ayant obtenu au moins 75% des points, le nombre de copies l'ayant abordée (sur un total de 745 copies) ainsi que la réussite (pourcentage du nombre total de points obtenus par les 745 copies par rapport au nombre total de points possible). Par ailleurs, chaque question était notée sur 4 points, avec un coefficient multiplicatif indiqué ci-dessous.

Exercice 1. Les candidats ont obtenu en moyenne 44% de leurs points sur cet exercice.

(1) (a) [689 copies $\geqslant$ 75% sur 745 copies, réussite de 95%, coefficient 0.5]
Rien à signaler sur cette question.

(b) [332 copies $\geqslant$ 75% sur 720 copies, réussite de 60%, coefficient 2]
Nous attendions des justifications plus précises que par exemple « $x \ln x >> x$ donc $f(x) \to \infty$ lorsque $x \to \infty$ ». Nous avons vu plusieurs fois des candidats tenant d'écrire un développement limité de ln au voisinage de 0.

(c) [511 copies $\geqslant$ 75% sur 730 copies, réussite de 71%, coefficient 0.5]
Nous avons apprécié les copies qui rappellent rapidement pourquoi f était dérivable.

(d) [422 copies $\geqslant$ 75% sur 635 copies, réussite de 63%, coefficient 0.5]
Rien à signaler sur cette question.

(e) [278 copies $\geqslant$ 75% sur 600 copies, réussite de 51%, coefficient 1]

Les copies dont la figure n'était pas cohérente avec le tableau de variation ou l'équation de la tangente précédemment trouvés ont été sanctionnées.

(2) [222 copies $\geqslant$ 75% sur 578 copies, réussite de 42%, coefficient 2]

La justification de la convergence de l'intégrale a généralement posé des difficultés : il ne fallait pas oublier de préciser que ln était continue sur $]0, n]$ pour justifier qu'il n'y avait qu'une impropreté en 0. Par ailleurs, ln n'est pas positive au voisinage de 0. Enfin, comme mentionné précédemment, dans le cas d'une comparaison avec $\frac{1}{x^\alpha}$, de nombreux candidats confondent le critère en 0 et en ∞.

Les copies écrivant « $0 \ln(0) - 0$ » ont été lourdement sanctionnées.

(3) (a) [113 copies $\geqslant$ 75% sur 440 copies, réussite de 21%, coefficient 1]

Beaucoup de candidats ont tenté de démontrer l'inégalité en calculant explicitement l'intégrale. L'écrasante majorité n'y est pas parvenue, soit en admettant finalement le résultat, soit en faisant des erreurs de calcul ou du bluff. Ceux-ci ont été lourdement sanctionnés pour l'honnêteté.

(b) [249 copies $\geqslant$ 75% sur 401 copies, réussite de 38%, coefficient 0.5]

De nombreuses copies ont pu traiter cette question en admettant le résultat de la question précédente.

(4) (a) [111 copies $\geqslant$ 75% sur 443 copies, réussite de 25%, coefficient 1.5]

Les candidats qui ont écrit que $n(n-1)\cdots(n-k+1) \leqslant n^k$ sans justifications ont perdu des points.

(b) [41 copies $\geqslant$ 75% sur 230 copies, réussite de 10%, coefficient 1]

De nombreuses copies (même de très bons candidats) écrivent que $k! \leqslant k^k$, puis en déduisent le fait que $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{k^k}$.

Deux candidats ont astucieusement remarqué que comme $e^k = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^i}{i!}$, on a $e^k \geqslant \frac{k^k}{k!}$, car cette dernière quantité est un des termes de la série précédente qui est à termes positifs.

(5) (a) [178 copies $\geqslant$ 75% sur 581 copies, réussite de 42%, coefficient 1.5]

Une somme de variables aléatoires de Bernoulli ne suit pas toujours une loi binomiale. Les copies oubliant d'invoquer l'indépendance ou ne justifiant pas le paramètre $\frac{1}{n}$ ont perdu des points.

(b) [75 copies $\geqslant$ 75% sur 480 copies, réussite de 18%, coefficient 1]

Ce n'est pas parce que $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ est constant que ces variables aléatoires sont indépendantes (considérer par exemple des variables aléatoires constantes). Il s'agissait ici de montrer que les variables aléatoires n'étaient pas indépendantes en considérant par exemple $\mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = n)$.

En toute rigueur, il aurait fallu distinguer le cas $n = 1$, mais nous n'en avons tenu compte.

(c) [87 copies $\geqslant$ 75% sur 533 copies, réussite de 22%, coefficient 1]

Le nombre d'erreurs dans le calcul de la limite de $(1 - \frac{1}{n})^n$ lorsque $n \to \infty$ est impressionnant. Seules les bonnes copies pensent à utiliser la forme exponentielle avec un développement limité de ln au voisinage de 1.

Il n'est pas normal d'écrire que des probabilités sont supérieures à 1 et de ne pas s'en soucier. De telles copies ont été lourdement sanctionnées.

(d) [231 copies $\geqslant$ 75% sur 479 copies, réussite de 39%, coefficient 1]
Il fallait donner un minimum de justifications. Par exemple, les copies n'écrivant que « $\mathbb{E}[X_1] = n \cdot \frac{1}{n} = 1$ » ont perdu des points.

(e) [7 copies $\geqslant$ 75% sur 130 copies, réussite de 3%, coefficient 2]
Cette question a généralement été traitée par les très bonnes copies.

(f) [1 copie $\geqslant$ 75% sur 38 copies, réussite de 0.5%, coefficient 2]
Les très bonnes copies ont bien commencé le raisonnement en majorant la probabilité apparaissant dans la question par $n\mathbb{P}\left(X_1 \geqslant \frac{c\ln(n)}{\ln(\ln(n))}\right)$. Seule la meilleure copie a réussi cette question très difficile.

Problème A. Les candidats ont obtenu en moyenne 26% de leurs points sur ce problème.

(1) [79 copies $\geqslant$ 75% sur 545 copies, réussite de 19%, coefficient 1.5]
Cette question, un peu inhabituelle compte tenu du grand nombre de paramètres, a posé des difficultés au candidats. Le plus simple était de comparer la série de terme général $p_k s^k$ à celle de terme général p_k plutôt qu'à celle de terme général s^k. En effet, dans ce dernier cas, il faut distinguer le cas $s < 1$ et le cas $s = 1$.

(2) [218 copies $\geqslant$ 75% sur 640 copies, réussite de 56%, coefficient 1]
Si le calcul de $f(0)$ a généralement été bien réussi, le calcul de $f(1)$ a très souvent mené à « $f(1) = 1 + p_0$ » (ce qui souligne la nécessité de lire avec soin l'énoncé).

(3) (a) [114 copies $\geqslant$ 75% sur 494 copies, réussite de 23%, coefficient 1]
Il s'agissait ici de remarquer que $p_i = 0$ pour $i \geqslant 2$. La plupart des candidats ont tenté un raisonnement par récurrence (qui n'était pas nécessaire). Les candidats arrivant à la conclusion souhaitée par des égalités sans justifications ont été lourdement sanctionnée.

(b) [391 copies $\geqslant$ 75% sur 547 copies, réussite de 58%, coefficient 0.5]
Rien à signaler sur cette question.

(c) [274 copies $\geqslant$ 75% sur 495 copies, réussite de 48%, coefficient 1]
Rien à signaler sur cette question.

(4) [256 copies $\geqslant$ 75% sur 422 copies, réussite de 41%, coefficient 1]
De manière un peu étonnante, pas mal de candidats ayant trouvé la bonne expression de u_n procèdent à la méthode usuelle pour étudier la convergence d'une suite récurrente de type $u_{n+1} = f(u_n)$, alors qu'il suffisait de passer à la limite dans l'expression de u_n.

(5) Cette partie sur les variables aléatoires continues a globalement été très mal traitée.

(a) [37 copies $\geqslant$ 75% sur 326 copies, réussite de 9%, coefficient 1.5]
Il suffisait de combiner le fait que $V_n = \frac{V_0 - 1}{2^n} + 1$ avec la linéarité de l'espérance.

(b) [32 copies $\geqslant$ 75% sur 215 copies, réussite de 7%, coefficient 1]
Cette question directe d'application du cours a rencontré très peu de succès, ce qui nous a surpris.

(c) [5 copies $\geqslant$ 75% sur 88 copies, réussite de 2%, coefficient 1.5]
Cette question a été traitée dans les très bonnes copies.

(6) [93 copies $\geqslant$ 75% sur 483 copies, réussite de 23%, coefficient 1]
La plupart des candidats ont été piégés par le fait que la somme géométrique $\sum_{i=1}^{\infty}(rs)^i$ commençait au rang 1 et non au rang 0.

(7) (a) [330 copies $\geqslant$ 75% sur 438 copies, réussite de 51%, coefficient 1]
Cette question facile aurait pu être traitée davantage (d'où la nécessité de parcourir rapidement tout le sujet pour identifier de telles question).

(b) [35 copies $\geqslant$ 75% sur 252 copies, réussite de 8%, coefficient 2]
Il fallait avoir trouvé le bon résultat à la question (6) pour aborder cette question. Les copies ayant bien réussi ont trouvé $\{1, \frac{1-r}{r}\}$ et les meilleurs copies ont pensé à distinguer les deux cas $r \leqslant 1/2$ et $r > 1/2$.

(8) [1 copie $\geqslant$ 75% sur 114 copies, réussite de 2%, coefficient 2]
Cette question a été résolue par la meilleure copie.

(9) [42 copies $\geqslant$ 75% sur 287 copies, réussite de 11%, coefficient 1.5]
On ne pouvait pas dériver impunément terme à terme la série définissant f.

(10) [aucune copie $\geqslant$ 75% sur 44 copies, réussite de 0.5%, coefficient 2]
Cette question plus délicate d'analyse réelle n'a pas été entièrement résolue, même si deux copies ont essentiellement compris comment faire. Pour l'indication, il fallait bien voir que K_ε était indépendant de s.

Problème B. Les candidats ont obtenu en moyenne 30% de leurs points sur ce problème.

(1) (a) [330 copies $\geqslant$ 75% sur 642 copies, réussite de 57%, coefficient 1]
Deux types d'erreurs ont été rencontrés : des erreurs de calcul, ou des candidats qui ont lu trop rapidement l'énoncé et qui ont pensé que la matrice compagnon d'un polynôme de degré n était de taille $n+1$.

(b) [414 copies $\geqslant$ 75% sur 618 copies, réussite de 64%, coefficient 1]
Les candidats n'ayant pas réussi cette question sont essentiellement ceux qui ont lu trop rapidement l'énoncé.

(c) [463 copies $\geqslant$ 75% sur 587 copies, réussite de 48%, coefficient 1.5]
Il y a eu de nombreuses valeurs sur le calcul de valeurs propres. Il n'est pas vrai que la matrice C_R est triangulaire. Il n'est pas vrai que faire des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes ne change pas les valeurs propres.

(d) [246 copies $\geqslant$ 75% sur 518 copies, réussite de 37%, coefficient 1]
Les justifications imprécises ont été sanctionnées. De nombreuses copies disent que « C_R est de rang 2 et admet deux valeurs propres distinctes donc C_R est diagonalisable ». Il semble donc qu'il y ait une confusion entre la notion de taille et de rang. Par ailleurs, l'utilisation du terme « dimension » pour le nombre de lignes ou colonnes d'une matrice carrée nous paraît dangereux : beaucoup de candidats qui écrivent que C_R est de dimension 2, utilisent le théorème de rang en écrivant $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui est alors parfois n, parfois n^2).

(2) (a) [113 copies $\geqslant$ 75% sur 475 copies, réussite de 28%, coefficient 2]
Les bonnes copies ont correctement traité cette question.

(b) [76 copies $\geqslant$ 75% sur 345 copies, réussite de 18%, coefficient 1]

Il fallait bien préciser que la question (2a) était utilisée le cas échéant. Plusieurs copies confondent le fait que $P(0) = 0$ et le fait que P soit le polynôme nul.

(c) [16 copies $\geqslant$ 75% sur 172 copies, réussite de 5%, coefficient 1.5]
Cette question généralisait la question (2a). Un peu plus abstraite, elle a été traitée dans les toutes meilleurs copies.

(3) [1 copie $\geqslant$ 75% sur 388 copies, réussite de 4%, coefficient 2]
Cette question plus originale et difficile, arrivant tôt dans le problème, a probablement dérouté les candidats. Les candidats ayant remarqué que si $a_0 \neq 0$, alors l'application n'était pas linéaire ont été récompensés. En fait, l'application est linéaire si et seulement si $n = 1$ et $a_0 = 0$ (ce qui a été remarqué dans une copie).

(4) (a) [255 copies $\geqslant$ 75% sur 409 copies, réussite de 42%, coefficient 1.5]
Les copies ayant trouvé le bon polynôme R ont généralement bien réussi cette question.

(b) [34 copies $\geqslant$ 75% sur 187 copies, réussite de 9%, coefficient 1]
Les candidats qui ont abordé cette question ont mis en oeuvre un raisonnement de récurrence, mais peu ont bien justifié toutes les étapes.

(c) [66 copies $\geqslant$ 75% sur 131 copies, réussite de 12%, coefficient 1]
La réussite est plutôt bonne parmi les candidats ayant regardé cette question.

(d) [17 copies $\geqslant$ 75% sur 126 copies, réussite de 4%, coefficient 1]
Il fallait avoir bien compris ce qui précédait pour résoudre cette question.

(e) [3 copies $\geqslant$ 75% sur 80 copies, réussite de 0.5%, coefficient 1]
Seules les meilleurs copies ont exploité le fait que C_P et M_P commutaient.

(5) (a) [37 copies $\geqslant$ 75% sur 122 copies, réussite de 8%, coefficient 0.5]
Il fallait justifier rapidement pourquoi $C_P^n X = \lambda^n X$.

(b) [61 copies $\geqslant$ 75% sur 141 copies, réussite de 11%, coefficient 0.5]
La réussite est plutôt bonne parmi les candidats ayant regardé cette question.

(6) (a) [3 copies $\geqslant$ 75% sur 52 copies, réussite de 1%, coefficient 1.5]
Les meilleures copies ont bien compris comment procéder.

(b) [aucune copie $\geqslant$ 75% sur 21 copies, réussite de 0.1%, coefficient 2]
Cette question délicate, en fin de problème, a été très peu abordée.

(7) Quelques candidats espèrent grappiller quelques points en écrivant quelques énoncés (souvent faux) sans justifications. Non seulement cela n'a pas fonctionné, mais ils ont été lourdement sanctionnés pour l'honnêteté.

(a) [2 copies $\geqslant$ 75% sur 46 copies, réussite de 0.5%, coefficient 1.5]
Deux candidats ont redéployé les résultats des questions précédentes pour répondre correctement à cette question.

(b) [1 copie $\geqslant$ 75% sur 42 copies, réussite de 0.5%, coefficient 1.5]
L'un des deux candidats précédents a ensuite pu conclure.