Banque Lettres et Sciences Economiques et Sociales

ÉNS Paris – Épreuve orale de mathématiques 2017

Emilie Kaufmann, Igor Kortchemski

Durée de l'épreuve : 1 heure de préparation et 30 min de passage (dont au plus 10 minutes laissées au candidat).
Modalités : deux exercices indépendants à préparer.

Calculatrice interdite

Table des matières

1 Commentaires généraux

Le jury a été enthousiasmé par le niveau général des candidats : la moyenne des notes de cette année s'établit à 11.6 (contre 11.4 en 2016, 11.3 en 2015 avec des critères de notation et difficulté des planches similaires). L'écart-type de cette année est de 4.4 (contre 4.3 en 2016 et 4.9 en 2015).

La majorité des candidats connaissent relativement bien leur cours, parviennent à résoudre seuls des questions faciles, voire quelques questions plus difficiles avec des indications. Nous déplorons que 10 candidats (contre 8 l'année dernière) aient obtenu des notes inférieures ou égales à 6/20 témoignant de grosses lacunes sur des notions importantes du programme, ce qui représente environ 16% des admissibles. Ce pourcentage est malheureusement en hausse par rapport à l'année dernière (9% en 2016 et 20% en 2015). Cependant, le nombre de bonnes prestations $\geqslant 14/20$ est en légère augmentation (39% des admissibles, contre 35% en 2016). Plusieurs excellents candidats ont impressionné le jury par leur maîtrise des mathématiques,

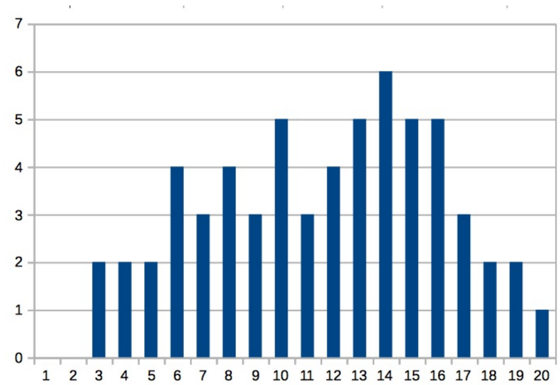

Figure 1 – Histogrammes des notes de l'oral.

leur intuition et leurs idées. Ainsi, 5 d'entre eux ont obtenu une note supérieure ou égale à 18 (contre 6 en 2016). Parmi les 26 candidats sur liste principale d'admission, 18 ont eu au moins 15/20 (contre 12 l'année dernière).

Nous tenons à féliciter les candidats ainsi que leurs professeurs pour le travail accompli, leurs efforts ont été récompensés.

Analyse des notes. Cette année, la note finale a été obtenue à partir d'une note sur 47.5 en notant sur 5 points 9 critères différents : connaissance du cours (coefficient 2), autonomie sur les questions de base (coefficient 1), autonomie sur les questions difficiles (coefficient 1.5), erreurs grossières (coefficient 1), capacité à corriger ses erreurs (coefficient 1), réactivité aux questions et prise d'initiative (coefficient 1), intuition (coefficient 1), rédaction mathématique (coefficient 1) et gestion du temps de l'exposé (coefficient 1).

Ces critères de notation ont amené aux types de prestations orales suivantes (quasiment identiques à celles de l'année dernière) :

- note $\leqslant 7$: le cours n'est pas bien maitrisé et plusieurs erreurs importantes sont commises
- note entre 8 et 12 : le cours est plutôt maitrisé et/ou les candidats accumulent quelques erreurs, arrivent à traiter plusieurs questions de la planche, mais ne tirent pas vraiment profit de la reprise.
- note entre 13 et 15 : le cours est globalement bien maîtrisé, les candidats ne commettent pas beaucoup d'erreurs et ont plutôt bien avancé dans les planches avec une aide conséquente du jury.
- note $\geqslant 16$: le cours est bien maîtrisé, et les candidats ont bien avancé de manière autonome dans les planches et réagissent bien aux indications du jury.

Il est à souligner que certains candidats n'ayant pas traité une fraction significative des questions dès la préparation ont toutefois pu obtenir de bonnes notes en sachant exploiter les indications du jury pour parvenir à bien avancer la résolution des exercices lors de la reprise.

2 Déroulement de l'épreuve

Les candidats disposent d'abord d'une heure pour préparer leur passage à l'oral. Chaque planche est constituée de deux exercices totalement indépendants. Chaque couplage est construit dans un triple objectif d'équilibre : couverture thématique (analyse, algèbre, probabilités et statistiques), difficulté (deux exercices moyens, ou bien un exercice facile ou court couplé avec un plus difficile ou long) et originalité. Comme les années précédentes, nous avons prêté une attention toute particulière à la progressivité des planches, qui contenaient toutes des questions faciles pour mettre en confiance les candidats, mais également des questions plus difficiles permettant aux meilleurs candidats de s'exprimer. Mentionnons que toutes les planches sont prêtes avant le début des épreuves, et sont distribuées selon un ordre aléatoire défini avant le début des oraux.

Lors du passage à l'oral, qui dure environ 30 minutes, le candidat dispose de dix minutes, au maximum, pour présenter ce qu'il a réussi à faire lors de sa préparation. Le reste du temps est dédié à une discussion avec le jury. Celui-ci revient d'abord sur ce qu'a écrit *et* dit le candidat afin de rectifier certaines erreurs ou corriger des maladresses. Ensuite, afin de tester les réactions et le recul, les examinateurs abordent les questions que le candidat n'a pas réussi à faire en donnant des indications. Dans le cas de très bons candidats, le jury n'hésite pas à poser des petites questions supplémentaires ne figurant pas dans la planche.

Dans l'ensemble, le déroulement de l'oral est très satisfaisant et permet au jury de bien évaluer les candidats en leur donnant l'opportunité de bien montrer tout ce qu'il savent faire dans les deux exercices proposés, voire davantage.

Présence du public. Cette année, les oraux se sont très bien déroulés. Rappelons que le public, qu'il assiste à une épreuve ou qu'il reste dans les couloirs pendant une épreuve, doit respecter un silence total jusqu'à la sortie du candidat, s'abstenant là encore de communiquer avec ce dernier avant sa sortie des couloirs.

3 Conseils aux candidats

Certains candidats pourraient améliorer leur prestation en faisant attention aux points cruciaux suivants :

– Nous encourageons les candidats à écrire au tableau, surtout les indications données à la reprise. Les formules mathématiques énoncées oralement peuvent être ambivalentes et la simple écriture au tableau permet par exemple au jury de rectifier une erreur d'interprétation du candidat.

> Toute prise d'initiative consistant à tenter des choses en les écrivant au tableau est **fortement valorisée**.

Il ne faut pas hésiter à prendre le temps de la réflexion.

– Nous encourageons les candidats à mentionner les pistes concrètes qu'ils ont tenté d'explorer lorsqu'ils n'ont pas résolu une question.
– Le jury, toujours bienveillant, cherche à évaluer le plus justement les candidats et n'essaiera jamais de les « piéger ». En général, lorsque le candidat est laissé sans indication en silence, c'est que le jury estime qu'il est sur une bonne piste. Il est donc inutile, voire contre-productif, pour le candidat de s'arrêter, se retourner et chercher l'acquiescement du jury à chaque étape du raisonnement.
– Nous encourageons les candidats à se méfier de l'impression qu'ils ont de leur prestation, qui ne reflète probablement pas leur note. Ainsi, quelle que soit sa préparation, un candidat ne doit jamais se démobiliser en croyant avoir raté son oral, alors que les attentes du jury ne sont pas exactement les mêmes sur tous les exercices.

Mentionnons également d'autres points importants :

– il ne faut pas utiliser les dix minutes coûte que coûte lors de la première phase de l'oral. Comme explicitement marqué sur l'énoncé, il est conseillé de ne pas trop entrer dans les détails de calculs. Il est toujours judicieux de présenter de manière concise les étapes importantes du raisonnement. En cas de doute, le jury reviendra sur les détails lors de la reprise. Certains candidats ont eu du mal à trouver le bon équilibre, détaillant parfois excessivement des calculs simples ou passant sous silence des points clés. D'autres, n'ayant traité que peu de questions en préparation, ont fait traîner en longueur la présentation pour remplir les dix minutes, ce qui n'a pu que les desservir. À l'inverse, les candidats ne doivent en aucun cas prendre plus de dix minutes pour l'exposé dans leur intérêt même, car ils réduisent inutilement leurs opportunités de profiter de l'interaction avec le jury pour avancer dans les exercices. Le cas échéant, le jury est amené à interrompre l'exposé. Même si un candidat a beaucoup de choses à présenter, il est nécéssaire qu'il fasse un choix dans les détails qu'il donne (le jury lui demandera éventuellement des précisions).

  Nous insistons sur le fait que la prestation orale est notée sur sa totalité. Ainsi, une présentation courte n'est pas du tout pénalisée en soi, et elle laisse simplement plus de temps au candidat pour améliorer sa note lors de la reprise. Celle-ci est très importante pour la détermination de la note : un candidat ayant bloqué sur des questions pourra obtenir une très bonne note s'il réussit à bien exploiter les indications données par le jury et montre une bonne maîtrise des notions essentielles du programme sans dire ou écrire des assertions fausses.
– Une bonne gestion du tableau est primordiale pour un bon déroulement de l'oral, et le jury ne souhaite pas que le candidat efface le tableau pendant la première phase d'oral. Ainsi, il faut éviter de commencer par écrire en plein milieu du tableau la réponse à la première question, puis demander au jury s'il est possible d'effacer. Il faut cependant mentionner que quasiment tous les candidats sont bien entraînés à cet exercice délicat, et arrivent à bien gérer le tableau.
– Les questions des exercices étant en général posées dans un ordre de difficulté croissant, nous conseillons aux candidats de bien se concentrer sur les premières questions avant d'aborder les suivantes.

- Lors de la reprise, nous conseillons aux candidats de ne pas être collés à leurs feuilles de brouillon pour tenter d'y dénicher les réponses aux questions du jury. Généralement le jury aura fait en sorte que tous les éléments nécessaires soient présents au tableau.
- Nous invitons les candidats à se méfier des « demi-souvenirs » qui peuvent amener à énoncer des énormités. Par ailleurs l'emploi de notions non maîtrisées hors-programme est lourdement sanctionné. Quelques exemples : l'invocation de la stricte convexité pour montrer que $e^x \geqslant 1+x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ou encore l'évocation de la "technique du polynôme annulateur" pour obtenir des conditions sur les valeurs propres d'une matrice, sans savoir la mettre en œuvre dans un cas particulier simple.

4 Erreurs les plus fréquentes

Nous signalons ici quelques erreurs commises par plusieurs candidats dans différentes planches.

- plusieurs candidats ont affirmé (avant de se corriger) que pour une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$, f croissante implique (u_n) croissante. Toujours pour ces mêmes suites, l'argument de continuité pour justifier le "théorème du point fixe" n'a pas toujours été retrouvé.
- les fonctions continues sur $[1, +\infty[$ ne sont pas nécessairement intégrables sur ce même intervalle !
- plusieurs exercices d'analyse faisant intervenir plusieurs paramètres ont perturbé les candidats pour dériver ou intégrer, car ils n'avaient pas toujours réalisé quels paramètres étaient considérés comme fixes.
- $u_n \sim v_n$ n'implique pas $e^{u_n} \sim e^{v_n}$!
- les candidats oublient (quasi) systématiquement de s'intéresser au support des variables aléatoires dont ils calculent la fonction de répartition.
- on peut souligner à l'oral beaucoup de confusions entre événements indépendants et événements incompatibles.
- le lien entre matrices et applications linéaires associées est un peu flou pour de nombreux candidats, en particulier lorsque les matrices sont rectangulaires. Nous avons ainsi entendu plusieurs fois que $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ était la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
- pour vérifier que x est vecteur propre de A, les candidats pensent à vérifier que $Ax = \lambda x$ mais oublient souvent de justifier que x est non nul.
- un projecteur vérifie $u \circ u = u$ (comme cela était rappelé dans nos énoncés) et non $u \circ u = \mathrm{id}$, comme cela a été utilisé plusieurs fois.
- nous avons entendu plusieurs énoncés faux du théorème du rang. Plus généralement, lorsqu'on demande aux candidats n'énoncer un théorème, ils ne pensent pas à nous présenter les hypothèses sous lesquelles celui-ci est vrai.

– il n'est pas vrai que faire des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes conserve les valeurs propres.

5 Commentaires planche par planche

Chaque planche a été donnée à quatre candidats consécutifs (sauf deux fois où cela sera précisé).

Planche 1. Le premier exercice s'intéressait à l'étude du comportement d'une suite de type $a_{n+1} = f(a_n)$ avec f définie par une intégrale. La plupart des candidats ont bien su expliciter la forme de f en distinguant trois cas. L'étude de la convergence de la suite a posé des difficultés aux candidats. Les bons candidats ont pu résoudre la question (2) avec des indications. La question (3), qui pouvait se traiter indépendamment de la question (2), a été abordée par un seul candidat. Il est à souligner que la résolution de $\frac{1}{4} + \frac{t^2}{4} = t$ a donné lieu à de nombreuses erreurs de calcul. Nous encourageons les candidats à écrire le plus possible d'étapes intermédiaires pour éviter les erreurs de calcul. La plupart des candidats savent que f croissante implique (a_n) monotone, mais ne savent pas le redémontrer spontanément, ce qui traduit un certain manque de recul.

Le deuxième exercice, plus original, visait à générer un tirage pile/face uniforme à partir d'un pile/face biaisé. Les candidats ont bien compris l'algorithme, mais il a posé de grosses difficultés de modélisation : les candidats n'ont pas introduit des événements ou des variables aléatoires appropriées pour exprimer les événements auxquels on s'intéressait. L'idée de regrouper deux par deux les lancers a été bien comprise par un candidat dès la préparation, et la question a pu être traitée à la reprise. La troisième question n'a été traitée à la reprise que par deux candidats. Tous les candidats ont pensé à utiliser l'expression d'une série géométrique dérivée pour la dernière question.

Planche 2. Le premier exercice d'algèbre linéaire, assez court, visait à manipuler des notions de base (composition d'applications linéaires, inversibilité) à travers des projecteurs. Il a posé des difficultés aux candidats. Les deux premières questions ont été résolues par un candidat dès la préparation, sinon elles ont pu être traitées à la reprise dans la majorité des cas. La dernière question a donné lieu à des question de cours portant sur l'inversibilité d'une application linéaire. À la question : « Comment montrer qu'un endomorphisme est inversible » le premier réflexe des candidats est de chercher un inverse explicite. Le fait que le noyau réduit à $\{0\}$ implique la surjectivité est un résultat important (parfois non su par les candidats), et les candidats ne réalisent pas que c'est un résultat assez profond qui est la conséquence du théorème du rang.

Le deuxième exercice, qui visait à donner une borne explicite sur les quantiles d'une loi gaussienne centrée réduite, a posé de grosses difficultés dès la première question. Les candidats n'ont majoritairement pas réalisé que x était ici une constante, ce qui a posé des problèmes pour le changement de variable. La notion de quantile n'était bien comprise que par un seul candidat, par conséquent les questions suivantes ont été peu abordées. Cependant, plusieurs candidats ont proposé des bons intervalles de confiance à la dernière question, en utilisant même une majoration de l'écart-type pour un candidat.

Planche 3. Le premier exercice, assez long, s'intéressait à l'étude asymptotique d'une suite définie par une intégrale généralisée. Il s'agissait de manipuler l'intégration par parties, des études de fonctions, des critères de comparaison. Il a posé des difficultés aux candidats, qui ont dû attendre la reprise pour résoudre une grande partie de l'exercice (l'intégration par parties de la question 1 n'a pas été traitée pendant la préparation et les candidats ont cru que la fonction $\ln(1-x)+\frac{3x}{2}$ était monotone). Plusieurs candidats pensent qu'une fonction continue est toujours intégrable.

Le deuxième exercice, qui étudiait la somme des valeurs propres d'une matrice symétrique aléatoire, n'a été sérieusement abordé que par un excellent candidat. Dans les autres cas, le jury a vérifié les connaissances de base concernant la notion de diagonalisabilité.

Planche 4. Le premier exercice testait la connaissance du théorème du rang et des manipulations d'inclusions et d'égalités entre sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Les candidats, relativement à l'aise dans ce domaine, ont su résoudre la majorité des questions avec des indications, parfois très nombreuses, à la reprise.

Le deuxième exercice s'intéressait à la construction et à des propriétés d'un estimateur visant à déterminer le nombre de boules dans une urne. La moitié des candidats ont pu traiter une majorité de l'exercice (un excellent candidat a tout résolu sauf la dernière question dès la préparation). La moitié des candidats ont pensé à exploiter que la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est la somme des variances pour simplifier les calculs. Mis à part quelques petites erreurs, le cours de base était maitrisé.

Planche 5. Deux candidats sont passés sur cette planche. Le premier exercice s'intéressait à une suite récurrente non linéaire. Le but était de déployer des techniques d'analyse asymptotique avec des équivalents et développements limités. Les deux premières questions ont pu être résolues après la reprise (les candidats n'ont pas pu résoudre la première question à la préparation), et la troisième question a été abordée une fois.

Le deuxième exercice s'intéressait à la diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dépendant de deux matrices A et B. Faute de temps, il a été moins abordé, et l'interrogation a essentiellement porté sur la troisième question et a permis de tester les connaissances en diagonalisation des candidats. Les candidats n'ont pas su démontrer que $(P^{-1})^T = (P^T)^{-1}$ pour une matrice carrée inversible P sans indications. Un candidat a su exhiber, à la reprise, les éléments propres de l'endomorphisme à partir de ceux des matrices A et B^T.

Planche 6. Trois candidats sont passés sur cette planche. Le premier exercice manipulait des variables aléatoires à densité. La deuxième question a posé de nombreuses difficultés même aux bons candidats. Il s'agissait d'enchaîner plusieurs développements limités. Attention à l'écriture $u_n \sim 0$!

Le deuxième exercice mobilisait différentes notions en algèbre linéaire (noyaux, images, théorème du rang, sous-espaces supplémentaires, diagonalisabilité). La première partie a pu être résolue pendant la reprise par de bons candidats. Dans tous les cas, le fait $\dim(F)+\dim(G) = \dim(G+F)$ lorsque F et G sont en somme directe n'a pas été un réflexe. La deuxième partie n'a pas été abordée.

Planche 7. Les trois premières questions du premier exercice d'algèbre linéaire ont été globalement bien traitées par les candidats, à l'aise sur ces questions élémentaires. La suite de l'exercice n'a été que rarement abordée. Les candidats n'ont pas su tirer profit de la question 4 donnant une méthode efficace pour multiplier entre elles des matrices de taille $n \times n$ ayant beaucoup de coefficients nuls.

Le deuxième exercice utilisait des propriétés de l'exponentielle pour démontrer une inégalité de Khintchine. Les candidats n'ont résolu la première question qu'avec des indications. Ils n'ont pas pensé à utiliser le fait que S ne prenait qu'un nombre fini de valeurs (d'ailleurs les candidats pensaient que S prenait n valeurs) pour justifier que e^{tS} admettait une espérance, et ont voulu utiliser le théorème de transfert pour calculer $\mathbb{E}[e^{tS}]$. Les dernières questions ont parfois été abordées à la reprise, notamment par un bon candidat qui a résolu tout l'exercice.

Planche 8. Le premier exercice, assez court, s'intéressait à l'étude d'une suite récurrente de type $x_{n+1} = f(x_n)$. Les deux premières questions ont généralement été bien traitées dès la préparation. La dernière question, plus astucieuse, faisant intervenir une somme télescopique, a été résolue avec des indications à la reprise.

Le deuxième exercice visant à comparer le spectre de AA^T et de A^TA pour une matrice rectangulaire A. Il était progressif et faisait intervenir les notions de transposée, rang, théorème du rang, diagonalisation. La première partie de la troisième question a été résolue à la préparation par des bons candidats. Plusieurs candidats confondent l'espace de départ et l'espace d'arrivée de l'application linéaire associée à une matrice rectangulaire, ce qui a conduit à des incertitudes pour l'application du théorème du rang. Dans la question (5), tous les candidats ont oublié de vérifier que A^TX_i était non nul pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Les deux dernières questions n'ont pas été (correctement) abordées.

Planche 9. Le premier exercice d'analyse était court (compte tenu de la longueur du deuxième exercice). La première question a été traitée par les bons candidats à la préparation. La deuxième question a été résolue à la reprise avec des indications. Les candidats n'ont pas su démontrer sans indications le fait que f' constante implique f affine.

Le deuxième exercice s'intéressait à une transition de phase concernant la connectivité dans des graphes d'Erdös-Rényi. Les trois premières questions ont généralement été bien traitées. La quatrième question a posé quelques soucis dans le calcul des développements limités (tous les candidats ayant traité cette question ont composé des équivalents par la fonction exponentielle). Les deux dernières questions n'ont pas été abordées.

Planche 10. Le premier exercice, qui visait à obtenir une minoration pour une probabilité a été plutôt bien réussi par les candidats. La question (2) a pu être résolue par tous les candidats, pour deux d'entre eux dès la préparation. Pour la troisième question, le jury rappelle qu'il est crucial d'introduire des événements pour appuyer son raisonnement et éviter les erreurs.

Le deuxième exercice était consacré à l'étude d'une application linéaire entre des espaces de polynômes. Un excellent candidat a résolu l'intégralité de l'exercice dès la préparation. Dans la plupart des autres cas, les question (2) et (3) ont posé des problèmes. Les candidats ont pensé à montrer que le noyau était réduit au polynôme nul, pas toujours avec les bons arguments, mais n'ont ensuite pas pensé à étudier l'image de Φ. Les candidats ont su redémontrer (parfois avec des indications) pourquoi un noyau réduit au vecteur nul implique l'injectivité d'une application linéaire.

Planche 11. Le premier exercice s'intéressait aux matrices carrées A telles que A^2 était égale à moins l'identité. Les trois premières questions ont généralement été bien traitées. Pour aborder la dernière question, nous avons d'abord demandé aux candidats quelles étaient les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = -\mathrm{Id}$. Ces derniers n'avaient généralement pas de recul concernant le lien entre applications linéaires et matrices (le fait que deux matrices représentant le même endomorphisme dans des bases différentes soient semblables n'était pas un réflexe). Avec un excellent candidat, nous avons démontré qu'il n'existait pas de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -\mathrm{Id}$ lorsque n était impair en diagonalisant A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Le deuxième exercice concernait la modélisation probabiliste d'une situation d'échanges de politesses, dans le but de calculer d'espérance de la durée de cet échange. Les candidats n'en sont pas arrivés là (à l'exception d'un seul, qui a presque tout résolu dès la préparation), mais ont pu avec succès calculer la loi de X_1, et aboutir (quasi) systématiquement lors de la reprise aux formules de récurrence demandées.

Planche 12. Le premier exercice étudiait le comportement asymptotique du minimum et du maximum de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle. Il a été plutôt bien traité par les candidats, qui ont toutefois souvent invoqué des arguments faux pour le calcul des limites aux question (2) et (3) (dont l'imaginaire règle de composition des équivalents, ou même pire). Lorsqu'on calcule une fonction de répartition, il est important de d'abord s'intéresser au support de la variable aléatoire en question.

Le deuxième exercice mobilisait des connaissances de base sur les nombres complexes (parties réelles et imaginaires, formule de Moivre, nombre complexe conjugué) afin de calculer une somme de sinus et d'en obtenir un équivalent lorsque le nombre de termes tend vers l'infini. Les deux premières questions ont été bien réussies par les candidats. Pour la troisième, le fait que la partie imaginaire d'une somme soit la sommes des partie imaginaires ne semblait pas évident à la plupart d'entre eux, et le calcul de la somme géométrique qui intervenait et sa simplification ont également posé des problèmes.

Planche 13. Le premier exercice visait à obtenir plusieurs inégalités concernant des fonctions convexes. Les trois premières questions ont pu être traitées, souvent à la reprise. Les deux dernières questions n'ont quasiment pas été abordées. Les bons candidats ont pu judicieusement déployer le théorème des accroissements finis. Pour tester le recul de ces candidats-là, nous avons demandé de démontrer qu'une fonction dérivable de dérivée positive était croissante (ce qui a posé des difficultés).

Le deuxième exercice, plus original, mêlait combinatoire et probabilités. Les bons candidats ont compris la décomposition fondée sur le premier ou les deux premiers lancers menant à la relation de récurrence de la question (2). Les autres questions, sauf une fois la question (4), n'ont pas été traitées. Pour aborder la question (3), plusieurs candidats ont fait appel à l'équation caractéristique associée à une suite récurrente linéaire d'ordre 2, mais n'ont pas pu obtenir une expression du terme général de la suite. La question pouvait se traiter sans cette notion pas explicitement au programme.

Planche 14. Le premier exercice concernait l'étude d'une suite récurrente de type $u_{n+1} = f(u_n)$. Il a permis de tester la connaissance du cours de base des candidats (nous avons par exemple demandé : pourquoi $u_n \to \ell$ implique que $f(u_n) \to f(\ell)$). La dernière question, nécessitant essentiellement un développement limité de $\sqrt{1+h}$ lorsque $h \to 0$ à l'ordre 2, a été attaquée par les bons candidats.

Le deuxième exercice d'algèbre linéaire, plus abstrait, nécessitait d'introduire de nombreuses notations, ce que les bons candidats ont su faire. À la deuxième question, certains n'ont pas réalisé que F n'était a priori pas engendré par une famille de vecteurs propres. Les trois dernières questions n'ont quasiment pas été abordés.

Planche 15. Le premier exercice faisait intervenir des manipulations d'algèbre linéaire en dimension finie (théorème du rang, inclusions et dimension, supplémentaires). Les candidats ont généralement bien avancé dans l'exercice et deux candidats l'avaient presque intégralement résolu dès la préparation. Pour tester le recul de ces candidats, nous avons demandé de démontrer le résultat du cours suivant : si $F \subset G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

Le deuxième exercice, plus original, nécessitait quelques prises d'initiatives dans l'interprétation de l'énoncé, que la reprise a permis de préciser. Un candidat a presque intégralement résolu cet exercice dès la préparation, et les bons candidats ont pu bien avancer dans le sujet.

Planche 16. Le premier exercice mélangeait probabilités conditionnelles, formule des probabilités totales, comparaison somme-intégrale et équivalents. Les bons candidats ont essentiellement traité l'exercice dès la préparation.

Le deuxième exercice, plus abstrait, n'a été sérieusement abordé que par les bons candidats (dont un qui a avait traité tout l'exercice, en dehors de la question 1(b), dès la préparation). Dans les autres cas, nous avons posé des questions élémentaires permettant de tester la connaissance du cours en algèbre linéaire.

6 Questions supplémentaires

Dans le cas des bons candidats ou pour tester le degré d'assimilation du cours, nous avons demandé des démonstrations des résultats des cours suivants :

- si $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est croissante, alors (u_n) est monotone ;
- si f est dérivable sur un intervalle avec $f' \geqslant 0$, alors f est croissante ;
- si $u_n \to \ell$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, à quelle condition a-t-on $\ell = f(\ell)$?
- si $F \subset G$ sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de $\mathbb{R}^n$ tels que $\dim F = \dim G$, alors $F = G$;
- si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et si u est injectif, alors u est surjectif.