

CX7611

Banque commune École Polytechnique - InterENS

PSI

Session 2017

---

# Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures

---

*Aucun document n'est autorisé*

*Aucune calculatrice n'est autorisée*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

*Ce sujet comporte trois parties. Il est conseillé de les traiter dans l'ordre.*

# Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Pour toute fonction  $f$  définie sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  et tout entier  $n \geq 1$ , on note  $f^{(n)}$  la fonction dérivée  $n$ -ème de  $f$  sur cet intervalle (quand cette dérivée  $n$ -ème existe). Ainsi  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$ , etc. On convient que  $f^{(0)} = f$ .
- Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times \cdots \times n$  la factorielle de  $n$ . On convient que  $0! = 1$ .
- Pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant  $n$  lignes et  $m$  colonnes. On pose  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ , et on note  $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Le déterminant d'une matrice carrée  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sera noté  $\det(A)$ . Sa transposée est notée  ${}^t A = [a_{j,i}]_{1 \leq i,j \leq n}$ . Lorsque  $A = [a_{1,1}] \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$  on identifie  $A$  au réel  $a_{1,1}$ .
- On note  $\mathbb{R}[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour tout entier  $n \geq 0$ , on désigne par  $\mathbb{R}_n[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à  $n$ . Les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  et les fonctions polynomiales associées seront notés identiquement. Ainsi, si par exemple  $P \in \mathbb{R}[X]$  désigne un polynôme, alors la fonction polynomiale associée sera aussi notée  $P$ .
- Etant donné un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$ , on note  $0_E$  l'élément nul de  $E$ , et on note  $\text{Id}_E$  l'application identité de  $E$  dans lui-même. On note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .  
Si  $L \in \mathcal{L}(E)$  est un endomorphisme de  $E$  et  $n \geq 2$  un entier naturel, on note  $L^n$  l'application composée de  $L$  avec lui-même  $n$  fois :  $L^n = L \circ L \circ \cdots \circ L$  ( $n$  fois). Par convention  $L^0 = \text{Id}_E$  et  $L^1 = L$ . Le noyau et l'image de  $L$  seront notés respectivement  $\text{Ker } L$  et  $\text{Im } L$ .  
Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , on note  $F_1 + F_2$  la somme de ces deux sous-espaces. On écrira  $F_1 \oplus F_2$  pour signifier que cette somme est directe. Si, de plus,  $E$  est muni d'un produit scalaire, on écrira  $F_1 \oplus^\perp F_2$  pour signifier que la somme est orthogonale, c'est-à-dire que  $F_1$  et  $F_2$  sont orthogonaux entre eux. L'orthogonal d'un espace sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  sera noté  $F^\perp$ . On notera  $\dim(F)$  la dimension de  $F$ .

## Partie I

Soit  $m \geq 2$  un entier naturel et  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $2m + 1$ . Cet espace est muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Soient  $T$  et  $M$  deux endomorphismes de  $E$  vérifiant les hypothèses suivantes :

- (H1)  $T^{2m} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $T^{2m+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
- (H2)  $M^2 = \text{Id}_E$ .
- (H3)  $\forall (v, w) \in E^2, \langle M(v) | w \rangle = \langle v | M(w) \rangle$ .
- (H4)  $T \circ M + M \circ T = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

On pose dans la suite

$$F^+ = \text{Ker}(M - \text{Id}_E), \quad F^- = \text{Ker}(M + \text{Id}_E).$$

On considère l'application  $S$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall (v, w) \in E^2, S(v, w) = \langle v | T(w) \rangle + \langle T(v) | w \rangle,$$

et on note  $G$  l'ensemble des éléments  $u \in E$  vérifiant les deux propriétés :

- (a)  $u \in \text{Im } T$ ,
- (b)  $\forall v \in E, S(u, v) = 0$ .

1. Pour tout vecteur  $v \in E$ , on pose

$$v^+ = v + M(v), \quad v^- = v - M(v).$$

- (a) Montrer que :  $\forall v \in E, v^+ \in F^+$  et  $v^- \in F^-$ .
- (b) Montrer que  $E = F^+ \oplus^\perp F^-$ .
- (c) Montrer que :  $\forall v \in F^+, T(v) \in F^-$  et que  $\forall v \in F^-, T(v) \in F^+$ .  
En déduire que  $F^+$  et  $F^-$  sont stables par  $T^2$ .

- 2. Montrer que pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, 2m\}$ ,  $\text{Im}(T^{k+1}) \subset \text{Im}(T^k)$  et  $\text{Im}(T^{k+1}) \neq \text{Im}(T^k)$ .
- 3. En déduire que pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, 2m + 1\}$ , on a

$$\dim(\text{Im } T^k) = 2m + 1 - k, \quad \dim(\text{Ker } T^k) = k.$$

- 4. En déduire aussi que  $\text{Im } T^k = \text{Ker } T^{2m+1-k}$  pour  $0 \leq k \leq 2m + 1$ .
- 5. Soit  $k \in \{1, 2, \dots, 2m + 1\}$  et  $z \in (\text{Im } T^k)^\perp \cap (\text{Im } T^{k-1})$  tel que  $z \neq 0_E$ . Après avoir justifié l'existence d'un tel vecteur  $z$ , montrer que  $T^{2m+1-k}(z) \neq 0_E$ .

6. Montrer que pour tout nombre réel  $\alpha$ , l'endomorphisme  $\text{Id}_E + \alpha T^2$  est bijectif et que

$$(\text{Id}_E + \alpha T^2)^{-1} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \alpha^k T^{2k},$$

où  $(\text{Id}_E + \alpha T^2)^{-1}$  désigne l'endomorphisme inverse de  $\text{Id}_E + \alpha T^2$ .

7. Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et que  $G \cap \text{Ker } T = \{0_E\}$ .

8. En déduire que l'application  $(v, w) \in G \times G \mapsto \langle T(v) | T(w) \rangle$  est un produit scalaire sur  $G$ .

9. Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

(a) Montrer que  $M \circ T^k = (-1)^k T^k \circ M$ .

(b) En déduire que  $\text{Im } T^k$  et  $\text{Ker } T^k$  sont stables par  $M$ .

10. Montrer que l'une des deux assertions suivantes est vraie : (i)  $\text{Ker } T \subset F^+$  (ii)  $\text{Ker } T \subset F^-$ .

11. On suppose ici que  $\text{Ker } T \subset F^+$ .

(a) Montrer que :  $\forall z \in F^-, T^{2m}(z) = 0_E$ .

(b) Montrer que  $(\text{Im } T)^\perp \subset F^+$  et que  $(\text{Im } T^2)^\perp \cap \text{Im } T \subset F^-$ .

(c) Soit  $z \in (\text{Im } T)^\perp$  avec  $z \neq 0_E$ . Montrer que  $T(z) \in G^\perp$  et que  $T(z) \neq 0_E$ .

(d) Soit  $z \in (\text{Im } T^2)^\perp \cap (\text{Im } T)$  avec  $z \neq 0_E$ . Montrer que  $T(z) \in G^\perp$  et que  $T(z) \neq 0_E$ .

12. On dit désormais qu'un couple  $(w_1, w_2) \in E \times E$  est une *paire caractérisante* de  $G$  si  $w_1$  et  $w_2$  vérifient les trois propriétés :

(A)  $w_1 \in F^+, T(w_1) \in G^\perp$  et  $T(w_1) \neq 0_E$ ,

(B)  $w_2 \in F^-, T(w_2) \in G^\perp$  et  $T(w_2) \neq 0_E$ ,

(C)  $w_i \in (\text{Im } T^2)^\perp$  pour  $i = 1$  et  $i = 2$ .

Déduire des questions précédentes l'existence d'une paire caractérisante de  $G$ .

13. En déduire que  $\dim(G) \leq 2m - 2$ .

14. On suppose maintenant que  $G$  vérifie l'hypothèse suivante :

$$\textbf{(H5)} \quad \dim(G) = 2m - 2.$$

Montrer que si  $(w_1, w_2)$  est une paire caractérisante de  $G$  alors  $(T(w_1), T(w_2))$  constitue une base de  $G^\perp$ .

## Partie II

On conserve toutes les notations de la partie I et on suppose que les hypothèses (H1) , (H2), (H3), (H4) et (H5) sont toutes satisfaites. Soit  $(w_1, w_2)$  une paire caractérisante de  $G$  (c'est-à-dire vérifiant les propriétés (A), (B) et (C) de la question 12).

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on considère le problème suivant, noté  $(\mathcal{P}_\lambda)$  :

$$\text{Trouver } u \in G \text{ tel que : } \forall v \in G, \langle u | v \rangle - \lambda \langle T(u) | T(v) \rangle = 0 \quad (\mathcal{P}_\lambda)$$

et on note  $H_\lambda$  l'ensemble des solutions  $u$  de ce problème. On montre facilement que  $H_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $G$ .

15. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (a) Montrer que si  $(\mathcal{P}_\lambda)$  admet une solution  $u \neq 0_E$ , alors nécessairement  $\lambda > 0$ .
- (b) Soit  $u \in G$ . Montrer que  $u$  est solution de  $(\mathcal{P}_\lambda)$  si et seulement si :

$$(\text{Id}_E + \lambda T^2)(u) \in G^\perp.$$

En déduire qu'il existe deux nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$u = \alpha(\text{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_1) + \beta(\text{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_2).$$

- (c) Montrer que le problème  $(\mathcal{P}_\lambda)$  admet une solution non nulle si et seulement si

$$Q_1(\lambda) \cdot Q_2(\lambda) = 0,$$

où pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $Q_i$  est le polynôme

$$Q_i(X) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \langle T^{2k+1}(w_i) | T(w_i) \rangle X^k.$$

- (d) Supposons que  $\lambda$  est racine réelle du polynôme produit  $Q_1 Q_2$ . Montrer que  $\dim(H_\lambda) = 2$  si  $\lambda$  est racine commune de  $Q_1$  et de  $Q_2$ , et  $\dim(H_\lambda) = 1$  sinon.
- (e) Montrer que

$$Q_i(X) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k S(w_i, T^{2k+1}(w_i)) X^k, \text{ pour } i = 1 \text{ ou } i = 2.$$

16. Soit  $\mathcal{B} = (z_1, \dots, z_\ell)$ , où  $\ell = 2m - 2$ , une base de  $G$ . Pour tout élément  $u$  de  $G$ , on note  $U$  (lettre majuscule) le vecteur colonne comportant les coordonnées de  $u$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ . On note  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq \ell}$  et  $B = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq \ell}$  les deux matrices carrées dont les coefficients sont définis par

$$a_{ij} = \langle z_i | z_j \rangle, \quad b_{ij} = \langle T(z_i) | T(z_j) \rangle \text{ pour } 1 \leq i, j \leq \ell.$$

- (a) Soient  $u$  et  $v$  deux éléments de  $G$ . Montrer que

$$\langle u | v \rangle = {}^t U A V, \quad \langle T(u) | T(v) \rangle = {}^t U B V,$$

et en déduire que  $A$  et  $B$  sont inversibles.

- (b) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'un élément  $u \in G$  est solution de  $(\mathcal{P}_\lambda)$  si et seulement si

$$(A - \lambda B)U = 0.$$

En déduire que  $(\mathcal{P}_\lambda)$  admet une solution non nulle si et seulement si  $\det(A - \lambda B) = 0$ .

- (c) On définit la fonction  $\psi$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \frac{\det(A - tB)}{\det B}.$$

Montrer que cette fonction  $\psi$  est indépendante du choix de la base  $\mathcal{B}$ .

- (d) Justifier pourquoi on peut choisir la base  $\mathcal{B}$  de sorte que  $B = I_\ell$ . En déduire que  $\psi$  est une fonction polynomiale dont on précisera le degré.
- (e) Montrer que le polynôme  $\psi$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$  et que ses racines sont soit simples soit doubles.
- (f) Montrer que

$$\psi(X) = \frac{1}{S(w_1, T^{2m-1}(w_1))S(w_2, T^{2m-1}(w_2))} Q_1(X) Q_2(X).$$

(on justifiera pourquoi nécessairement  $S(w_i, T^{2m-1}(w_i)) \neq 0$  pour  $i = 1$  et  $i = 2$ ).  
En déduire que  $Q_1$  et  $Q_2$  sont scindés dans  $\mathbb{R}[X]$  et à racines simples.

## PARTIE III

On conserve ici les notations des parties I et II et on se place dans le cas particulier où  $E = \mathbb{R}_{2m}[X]$ , avec  $m \geq 2$  un entier naturel fixé. Cet espace vectoriel est muni du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

Désormais les deux endomorphismes  $T$  et  $M$  de  $E$  seront définis par

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2m}[X], T(P) = P' \text{ et } M(P) = P^*,$$

où  $P^*(X) = P(-X)$ .

On pose pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{R}_k^0[X] = \{P \in \mathbb{R}_k[X] \mid P(-1) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}.$$

17. Montrer que  $T$  et  $M$  vérifient bien les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4).

18. Quels sont les espaces  $F^+$  et  $F^-$  dans ce cas ?

19. Montrer que

$$\forall (P, Q) \in E^2, S(P, Q) = P(1)Q(1) - P(-1)Q(-1).$$

20. Déterminer le sous-espace  $G$ . L'hypothèse (H5) est-elle satisfaite ?

21. On définit pour tout entier naturel  $n$  le polynôme  $R_n$  comme suit

$$R_n(X) = (X^2 - 1)^n,$$

et on pose désormais

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} R_n^{(n)}(X).$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Quel est le degré du polynôme  $L_n$  ? Exprimer  $M(L_n)$  en fonction de  $L_n$ .

(b) Montrer que si  $n \geq 1$  alors

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle L_n | P \rangle = 0.$$

(c) Montrer que pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ , on a

$$L_n^{(k)}(1) = \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{1}{k! 2^k}.$$

(d) Montrer que pour tout entier naturel  $k$ , on a

$$S(L_n, L_n^{(2k+1)}) = 2L_n^{(2k+1)}(1).$$

22. Montrer que le couple  $(L_{2m}, L_{2m-1})$  est une paire caractérisante de  $G$ .

23. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On considère le problème : *trouver*  $P \in \mathbb{R}_{2m-1}^0[X]$  *tel que*

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2m-1}^0[X], \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt - \lambda \int_{-1}^1 P'(t)Q'(t)dt = 0.$$

Montrer que ce problème admet une solution  $P$  non identiquement nulle si et seulement si  $\lambda$  est racine du polynôme

$$K(X) = \left( \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k L_{2m-1}^{(2k+1)}(1) X^k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k L_{2m}^{(2k+1)}(1) X^k \right).$$

24. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2m-1}^0[X], \quad \langle P | P \rangle \leq 4 \langle P' | P' \rangle,$$

avec inégalité stricte si  $P$  est non nul.

25. En déduire que les racines de  $K$  sont toutes réelles et appartiennent à l'intervalle  $]0, 4[$ .

26. Soit  $(P_1, \dots, P_{2m-2})$  une base quelconque de  $G$ . On considère les deux matrices carrées  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 2m-2}$  et  $B = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 2m-2}$  définies par

$$a_{i,j} = \langle P_i | P_j \rangle, \quad b_{i,j} = \langle P'_i | P'_j \rangle \text{ pour } 1 \leq i, j \leq 2m-2.$$

Déterminer le rapport

$$\frac{\det(A)}{\det(B)}$$

en fonction de  $m$ .

**FIN DE L'ÉNONCÉ**