Banque Lettres et Sciences Economiques et Sociales

ÉNS Paris – Épreuve orale de mathématiques 2018

Emilie Kaufmann, Igor Kortchemski

Durée de l'épreuve : 1 heure de préparation et 30 min de passage (dont au plus 10 minutes laissées à la candidate ou au candidat).

Modalités : deux exercices indépendants à préparer.

Calculatrice interdite

Table des matières

1 Commentaires généraux

Le jury a été enthousiasmé par le niveau général : la moyenne des notes de cette année s'établit à 12.6 (contre 11.6 en 2017, 11.4 en 2016 et 11.3 en 2015 avec des critères de notation et une difficulté des planches similaires). L'écart-type de cette année est de 4.3 (contre 4.4 en 2017, 4.3 en 2016 et 4.9 en 2015).

La majorité des candidates et candidats connaissent relativement bien leur cours, parviennent à résoudre des questions faciles de manière autonome, voire quelques questions plus difficiles avec des indications. Nous déplorons que 8 candidates et candidats (contre 10 en 2017 et 8 en 2016) aient obtenu des notes inférieures à 7/20 témoignant de grosses lacunes sur des notions importantes du programme, ce qui représente environ 13% des admissibles (16% en 2017, 9% en 2016 et 20% en 2015). Cependant, le nombre de bonnes prestations $\geqslant 14/20$ est en bonne augmentation (48% des admissibles, contre 39% en 2017 et 35% en 2016). Plusieurs excellentes candidates et excellents candidats ont impressionné le jury par leur maîtrise des mathématiques, leur intuition et leurs idées. Ainsi, 7 personnes ont obtenu une note supérieure ou égale

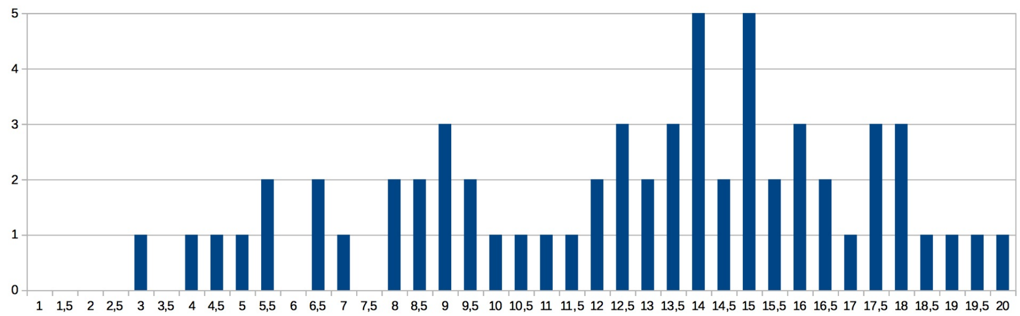

Figure 1 – Histogrammes des notes de l'oral.

à 18 (contre 5 en 2017 et 6 en 2016). Parmi les 25 personnes sur liste principale d'admission, 15 ont eu au moins 15/20 (contre 18 en 2017 et 12 en 2016).

Nous tenons à féliciter les candidates, candidats ainsi que leurs professeures, professeurs pour le travail accompli, leurs efforts ont été récompensés.

Analyse des notes. Cette année, la note finale a été obtenue à partir d'une note sur 45 en notant sur 5 points 8 critères différents : connaissance du cours (coefficient 2), autonomie sur les questions de base (coefficient 1), autonomie sur les questions difficiles (coefficient 1.5), absence d'erreurs grossières (coefficient 1), capacité à corriger ses erreurs (coefficient 1), réactivité aux questions et prise d'initiative (coefficient 1), intuition (coefficient 1) et rédaction mathématique (coefficient 1).

Ces critères de notation ont amené aux types de prestations orales suivantes (quasiment identiques à celles de l'année dernière) :

- note $\leqslant 7$: le cours n'est pas bien maitrisé et plusieurs erreurs importantes sont commises.
- note entre 8 et 12 : le cours est plutôt maitrisé et/ou les candidates ou candidats accumulent quelques erreurs, arrivent à traiter plusieurs questions de la planche, mais ne tirent pas vraiment profit de la reprise.
- note entre 13 et 15 : le cours est globalement bien maîtrisé, les candidates ou candidats ne commettent pas beaucoup d'erreurs et ont plutôt bien avancé dans les planches avec une aide conséquente du jury.
- note $\geqslant 16$: le cours est bien maîtrisé, et les candidats ont bien avancé de manière autonome dans les planches et réagissent bien aux indications du jury.

Il est à souligner que certains oraux n'ayant pas traité une fraction significative des questions dès la préparation ont toutefois pu obtenir de bonnes notes en sachant exploiter les indications du jury pour parvenir à bien avancer la résolution des exercices lors de la reprise.

2 Déroulement de l'épreuve et remarque au public

Les candidates et candidats disposent d'abord d'une heure pour préparer leur passage à l'oral. Chaque planche est constituée de deux exercices totalement indépendants. Chaque couplage est construit dans un triple objectif d'équilibre : couverture thématique (analyse, algèbre, probabilités et statistiques), difficulté (deux exercices moyens, ou bien un exercice facile ou court couplé avec un plus difficile ou long) et originalité. Comme les années précédentes, nous avons prêté une attention toute particulière à la progressivité des planches, qui contenaient toutes des questions faciles pour mettre en confiance les candidates et candidats, mais également des questions plus difficiles permettant aux meilleures candidates et aux meilleurs candidats de s'exprimer. Mentionnons que toutes les planches sont prêtes avant le début des épreuves, et sont distribuées selon un ordre aléatoire défini avant le début des oraux.

Lors du passage à l'oral, qui dure environ 30 minutes, la candidate ou le candidat dispose de dix minutes, au maximum, pour présenter les éléments résolus lors de sa préparation. Le reste du temps est dédié à une discussion avec le jury. Celui-ci revient d'abord sur ce qu'a écrit *et* dit la candidate ou le candidat afin de rectifier certaines erreurs ou corriger des maladresses. Ensuite, afin de tester les réactions et le recul, les examinateurs abordent les questions que la candidate ou le candidat n'a pas réussi à faire en donnant des indications. Dans le cas de très bons oraux, le jury n'hésite pas à poser des petites questions supplémentaires ne figurant pas dans la planche.

Dans l'ensemble, le déroulement de l'oral est très satisfaisant et permet au jury de bien évaluer les candidates et candidats en leur donnant l'opportunité de bien montrer tout ce qu'elles et ils savent faire dans les deux exercices proposés, voire davantage.

Présence du public. Cette année, les oraux se sont bien déroulés. Rappelons que le public, qu'il s'agisse d'élèves, d'enseignantes ou d'enseignants, qu'il assiste à une épreuve ou qu'il reste dans les couloirs pendant une épreuve, doit respecter un silence total **et ne manifester aucune réaction** jusqu'à la sortie de la candidate ou du candidat, s'abstenant là encore de communiquer avec elle ou lui avant sa sortie des couloirs.

3 Conseils aux candidates et candidats

Certaines prestations pourraient être améliorées en faisant attention aux points cruciaux suivants :

– Nous encourageons les candidates et candidats à écrire au tableau, surtout les indications données à la reprise. Les formules mathématiques énoncées oralement peuvent être ambivalentes et la simple écriture au tableau permet par exemple au jury de rectifier une erreur d'interprétation de la candidate ou du candidat.

> Toute prise d'initiative consistant à tenter des choses en les écrivant au tableau est **fortement valorisée**.

Il ne faut également pas hésiter à prendre le temps de la réflexion.

– Nous encourageons les candidates et candidats à mentionner les pistes concrètes tentées lorsqu'une question n'a pas pu être résolue.

– Le jury, toujours bienveillant, cherche à évaluer le plus justement les candidates et candidats et n'essaiera jamais de les « piéger ». En général, lorsque la candidate ou le candidat sont laissés sans indication en silence, c'est que le jury estime qu'elle ou il est sur une bonne piste. Il est donc inutile, voire contre-productif, de s'arrêter, se retourner et chercher l'acquiescement du jury à chaque étape du raisonnement.
– Nous encourageons les candidates et candidats à se méfier de l'impression de leur prestation, qui ne reflète probablement pas leur note. Ainsi, quelle que soit sa préparation, un candidat ou une une candidate ne doit jamais se démobiliser en croyant avoir raté son oral, alors que les attentes du jury ne sont pas exactement les mêmes sur tous les exercices.

Mentionnons également d'autres points importants :

– Il ne faut pas utiliser les dix minutes coûte que coûte lors de la première phase de l'oral. Comme explicitement marqué sur l'énoncé, il est conseillé de ne pas trop entrer dans les détails de calculs. Il est toujours judicieux de présenter de manière concise les étapes importantes du raisonnement. En cas de doute, le jury reviendra sur les détails lors de la reprise. Certaines candidates et certains candidats ont eu du mal à trouver le bon équilibre, détaillant parfois excessivement des calculs simples ou passant sous silence des points clés. D'autres, n'ayant traité que peu de questions en préparation, ont fait traîner en longueur la présentation pour remplir les dix minutes, ce qui n'a pu que les desservir. À l'inverse, les candidates et candidats ne doivent en aucun cas prendre plus de dix minutes pour l'exposé dans leur intérêt même, car ils réduisent inutilement leurs opportunités de profiter de l'interaction avec le jury pour avancer dans les exercices. Le cas échéant, le jury est amené à interrompre l'exposé. Même si un candidat ou une candidate a beaucoup de choses à présenter, il est nécessaire de faire un choix dans les détails donnés (le jury demandera éventuellement des précisions).

  Nous insistons sur le fait que la prestation orale est notée sur sa totalité. Ainsi, une présentation courte n'est pas pénalisée en soi, et elle laisse simplement plus de temps au candidat ou candidate pour améliorer sa note lors de la reprise. Celle-ci est très importante pour la détermination de la note : un candidat ou candidate ayant bloqué sur des questions pourra obtenir une très bonne note s'il ou elle réussit à bien exploiter les indications données par le jury et montre une bonne maîtrise des notions essentielles du programme sans dire ou écrire des assertions fausses.
– Une bonne gestion du tableau est primordiale pour un bon déroulement de l'oral, et le jury ne souhaite pas que le candidat ou la candidate efface le tableau pendant la première phase d'oral. Ainsi, il faut éviter de commencer par écrire en plein milieu du tableau la réponse à la première question, puis demander au jury s'il est possible d'effacer. Lors de la reprise, il est important d'obtenir l'accord du jury avant se se mettre à effacer une partie du tableau. Il faut cependant mentionner que quasiment toutes les candidates et tous les candidats sont bien entraînés à cet exercice délicat, et arrivent à bien gérer le tableau.
– Les questions des exercices étant en général posées dans un ordre de difficulté croissant, nous conseillons aux candidates et aux candidats de bien se concentrer sur les premières questions avant d'aborder les suivantes.

– Lors de la reprise, nous conseillons aux candidates et aux candidats de ne pas être collés à leurs feuilles de brouillon pour tenter d'y dénicher les réponses aux questions du jury. Généralement le jury aura fait en sorte que tous les éléments nécessaires soient présents au tableau.

– Nous invitons les candidates et candidats à se méfier des « demi-souvenirs » qui peuvent amener à énoncer des énormités. Par ailleurs l'emploi de notions non maîtrisées hors-programme est lourdement sanctionné. Quelques exemples : l'invocation du fait qu'une matrice nilpotente n'est jamais diagonalisable, ou encore l'évocation de la "technique du polynôme annulateur" pour obtenir des conditions sur les valeurs propres d'une matrice, sans savoir la mettre en œuvre dans un cas particulier simple.

4 Erreurs les plus fréquentes

Nous signalons ici quelques erreurs commises par plusieurs candidates et candidats dans différentes planches.

– le fait qu'un vecteur propre est non nul n'est pas toujours un réflexe

– pour justifier l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle, il ne suffit pas d'étudier ce qui se passe aux bords

– le développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en zéro a été utilisé pour calculer une limite du type $(1+a_n)^{b_n}$

– les candidates et candidats ont souvent des difficultés lorsqu'on leur demande de justifier un calcul de probabilités en introduisant des événements

– on peut souligner à l'oral beaucoup de confusions entre événements indépendants et événements incompatibles

– l'écriture de certaines assertions mathématiques comme « la fonction f est constante », « la suite (u_n) est majorée » ou encore « la suite (u_n) converge vers 0 » en utilisant les quantificateurs a posé plusieurs difficultés.

– quelques confusions entre une fonction « croissante » et « strictement croissante » ont eu lieu.

– nous avons entendu plusieurs énoncés faux du théorème du rang. Plus généralement, lorsqu'on demande aux candidates et candidats n'énoncer un théorème, ils ne pensent pas à nous présenter les hypothèses sous lesquelles celui-ci est vrai.

5 Commentaires planche par planche

Afin de préserver l'anonymat, par convention, nous utilisons le terme « candidate » pour désigner un élément de l'ensemble {candidat, candidate}. Chaque planche a été donnée à quatre candidates consécutives (sauf deux fois où cela sera précisé).

Planche 1. Cette planche a été donnée à 3 candidates. Le premier exercice visait à étudier la diagonalisabilité d'un endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour y arriver, il s'agissait de remarquer que les vecteurs propres de Φ vérifiaient une equation différentielle linéaire du premier ordre, résolue dans la première question. Une candidate a pensé à écrire la matrice de l'endomorphisme dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$. Les trois premières questions ont été plutôt bien traitées lors de la préparation (cependant 2 candidates sur 3 ont oublié de vérifier que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$). La dernière question n'a pas jamais été complètement résolue lors de la reprise. La simple écriture avec des quantificateurs de la définition d'une fonction constante a posé souci à deux candidates, qui ont pourtant pu résoudre des questions plus avancées.

Le deuxième exercice s'intéressait à un tournoi constitué de manches successives. La première question a été plutôt bien résolue par les trois candidates, parfois avec des justifications incomplètes. Pour la seconde question, il fallait remarquer une relation d'inclusion entre les événements E_n et E_{n+1}, que les candidates ont souvent écrite dans le mauvais sens. La question 3, plus subtile, n'a été abordée par aucune candidate.

Planche 2. Le premier exercice, assez élémentaire, manipulait des probabilités conditionnelles. Il a été très bien réussi par la plupart des candidates, qui ont cependant parfois directement écrit le résultat du calcul, sans préciser clairement les étapes intermédiaire. Nous rappelons qu'introduire des événements pour modéliser une situation est toujours une bonne idée. Une seule candidate n'a pas su calculer la limite demandée, qui reposait sur un argument de croissance comparée.

Le deuxième exercice, plus difficile et abstrait, visait à exhiber les valeurs propres d'un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini à partir d'un projecteur. Une excellente candidate l'a résolu quasi intégralement dès la préparation. La première question, assez astucieuse, a été cependant bien résolue par trois candidates dès la préparation. Certaines questions suivantes ont engendré des petites confusions entre vecteurs propres du projecteur p et vecteurs propres (dans $\mathcal{L}(E)$) de l'endomorphisme H, qui ont été clarifiées à la reprise. Il a été souvent oublié qu'un vecteur propre devait être non nul. Une seule candidate a résolu la dernière question en définissant un endomorphisme u sur une base bien choisie de E. Question pour le lecteur ou la lectrice : l'endomorphisme H est-il diagonalisable ?

L'exercice suivant a ensuite été posé à deux candidates : trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

L'exercice suivant a ensuite été posé à une candidate : soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = F(x+1) - F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ est une densité de probabilité.

Planche 3. Le premier exercice proposait une modélisation probabiliste des plateforme dites de « production participative », où en posant une même question à un grand nombre de personnes on peut espérer obtenir une réponse correcte avec grande probabilité. La première question a été bien traitée par trois candidates, qui ont su introduire le bon système complet d'événements. Les candidates ont toutes eu l'intuition que les variables aléatoires N et R n'étaient pas indépendantes, mais une seule candidate a proposé un contre-exemple pertinent dès la préparation. Pour la question 4, les candidates ont toutes proposé l'égalité $C_n = (R > n/2)$ alors que seule une inclusion est vérifiée.

Le deuxième exercice mêlait analyse (intégration, définition d'une limite) et algèbre (étude d'un endomorphisme de l'espace des fonctions continues). Une seule candidate a proposé de dériver la fonction G_f pour montrer qu'elle était croissante. La seconde question a été plutôt bien réussie à la reprise, les candidates ont su introduire « les ε ». La question 4 n'a jamais été complètement résolue, mais deux candidates ont finalement compris comment exploiter la question 3 et une étude de fonction pour la résoudre.

Planche 4. Le premier exercice était dédié à l'étude d'un estimateur du nombre d'objets connectés utilisant un système de radio intelligente, fondé sur des communications aléatoires de plusieurs objets. La première question, assez subtile, a posé des difficultés aux candidates, qui ont essentiellement su justifier la formule donnée dans l'énoncé, mais en faisant comme si le canal choisi par l'objet considéré était fixe alors qu'il était aléatoire. La question 2 a été bien traitée par trois candidates dès la préparation, alors que seule une candidate a complètement abordé la question 3. Deux candidates ont eu des difficultés à exprimer M en fonction de p et K à partir de la relation de la question 1. La question 4, plus délicate, n'a pas été abordée.

Le deuxième exercice visait à démontrer qu'en dimension finie les endomorphismes $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres, et présentait un contre-exemple en dimension infinie. En dehors d'une candidate, toutes les candidates ayant traité la première question lors de la préparation ont oublié de vérifié que le vecteur propre $v(x)$ proposé pour $v \circ u$ était non nul. La question 2 n'a été correctement traitée par aucune candidate. Pour la question 3, certaines candidates ont refait les raisonnements précédents sur les matrices, alors qu'il suffisait d'exploiter le lien entre matrices et endomorphismes. Enfin à la question 4, les composées ont été souvent bien calculées sans pour autant arriver à une conclusion.

Planche 5. Cette planche a été donnée à trois candidates. Le premier exercice présentait un mécanisme de tirages et d'ajouts successifs de boules dans une urne. Il s'agissait de calculer l'espérance du nombre de boules d'une certaine couleur au bout de n tirages et d'en obtenir un équivalent lorsque $n \to \infty$. Deux très bonnes candidates ont résolu les six premières questions dès la préparation. Pour bien rédiger la question 4, il fallait se référer au support de V_{n-1} afin de justifier le système complet d'événement introduit, ce qui a été omis par une candidate. L'obtention de l'équivalent a été superficiellement abordé à la reprise dans deux cas.

Le deuxième exercice conduisait à manipuler des endomorphismes involutifs dans le but de montrer des égalités d'images. Il a été intégralement résolu à la reprise par une excellente candidate. La première question, un peu astucieuse, a posé problème à deux candidates, mais a pu être résolue à la reprise. La seconde question a été très bien résolue par deux candidates dès la préparation.

Le jury a posé des questions supplémentaires liées aux valeurs propres et à la diagonalisabilité des endomorphismes involutifs.

Planche 6. Le premier exercice proposait aux candidates de démontrer une formule de Taylor avec reste intégral et de s'en servir pour caractériser les fonctions vérifiant une équation implicite intégrale. Les candidates ont toutes pensé à effectuer une intégration par parties, mais n'ont pas très bien formalisé le raisonnement par récurrence, en oubliant notamment l'initialisation. Pour la question 2, il était nécessairement d'obtenir une formule pour $f^{(n)}(x)$ en tout point $x \in [0,1]$. Une seule candidate a proposé une formule correcte dès la préparation, mais la question a en général pu être traitée à la reprise. La troisième question n'a été que superficiellement abordée.

Le deuxième exercice nécessitait de manipuler des nombres complexes afin d'obtenir une expression pour une somme de coefficient binomiaux et finalement d'évaluer la probabilité que le nombre de pile soit divisible par un certain entier dans une suite de pile ou face. Cet exercice a pu être intégralement résolu à la reprise par une très bonne candidate. Le jury a relevé certaines confusions sur la définition de "j est multiple de k" ($j = \lambda k$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ d'après les candidates). Par ailleurs, le fait que le module de e^{ix} pour x réel vaut 1 n'est pas toujours un réflexe.

Planche 7. Le premier exercice amenait les candidates à démontrer plusieurs inégalités faisant intervenir le rang de f et f^2 pour un endomorphisme f vérifiant $f^3 = 0$. Il a été bien réussi par les candidates, qui ont pu traiter les deux premières questions dès la préparation. La dernière question, résolue à la reprise par la plupart des candidates nécessitait de caractériser l'image et le noyau de l'application g proposée par l'énoncé, qui n'avaient été exprimés correctement que par une candidate lors de sa préparation.

Le deuxième exercice introduisait la notion d'ordre stochastique pour deux variables aléatoires discrètes et cherchait à en proposer des définitions équivalentes. La première question a conduit à beaucoup d'erreurs de dérivation. Une seule candidate a directement présenté un calcul correct et remarqué le télescopage dans la somme. Les candidates ont essentiellement compris la question 1(b) mais ont formulé des raisonnements par équivalence assez imprécis. En particulier, le jury a dû systématiquement revenir sur l'assertion suivante : si g est croissante, $g(x) \leqslant g(y)$ équivaut à $x \leqslant y$. Les candidates ayant abordé la question 2(a) ont oublié de se préoccuper de la convergence des séries manipulées. Enfin l'implication réciproque dans la question 2(b) n'a été abordée que par une candidate à la reprise.

Planche 8. Le premier exercice concernait l'étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui permettait de montrer que toute matrice peut se décomposer de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Il a été plutôt bien réussi par les candidates, même si nous avons dû dans tous les cas clarifier l'inclusion $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Im}\ (\Phi)$ à la reprise ainsi que la question (4). Deux candidates ont invoqué les dimensions de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (ce qui n'était pas nécessaire pour résoudre l'exercice) mais n'ont pas su tout de suite en exhiber des bases.

Le deuxième exercice proposait aux candidates de démontrer une version plus forte de l'inégalité de Markov et de s'en servir pour évaluer la probabilité qu'un maximum de n variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées excède un certain seuil. La première question a été résolue par deux candidates dès leur préparation, et la deuxième question a en général été résolue à la reprise. La dernière question nécessitait d'effectuer deux développements limités successifs. Le jury rappelle qu'on ne peut pas utiliser le développement limité de $(1+x)^\alpha$ pour x proche de 0 lorsque α dépend de x, ce qui a d'abord été proposé par l'unique candidate ayant traité la question.

Planche 9. Le premier exercice présentaient deux jeux assez proches fondés sur un mécanisme aléatoire pour lesquels il fallait étudier l'espérance maximale des gains possibles. La question 1(a) a été bien traitée par deux candidates dès leur préparation, et à la reprise par l'ensemble des candidates. Pour la question 1(b), il fallait penser à d'abord comparer $G_1(c)$ et $G_2(c)$ et en déduire une relation sur les bornes supérieures des gains. La question (2) a pu être résolue à la reprise par une candidate, et nécessitait d'utiliser les propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue.

Le second exercice étudiait des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tels que u^2 est un projecteur. La première question présentait l'étude d'une cas particulier et a été bien traitée par les candidates dès la préparation. Les candidates avaient en général également démontré l'inclusion du spectre d'un projecteur dans $\{0, 1\}$ et nous avons pu établir leur diagonalisabilité à la reprise. Pour la question (3), trois candidates ont pu établir l'inclusion $sp(u) \subseteq \{-1, 0, 1\}$, et ont pu démontrer que 0 était valeur propre.

Planche 10. Le premier exercice visait à obtenir des encadrement pour des solutions d'équations du type $x - \ln(x) = a$ ou $xe^x = a$. La première question a été bien traité par les candidates dès leur préparation, qui n'ont toutefois pas tous parlé de la bijectivité de h sur $[1, +\infty[$. Seules deux candidates ont pensé toutes seules qu'il fallait faire une autre étude de fonction pour résoudre la question 2. Cette étude a pu être effectuée à la reprise dans tous les cas, et une candidate a pu alors terminer l'exercice.

L'objectif du deuxième exercice était de calculer des produits de sinus en passant par la résolution d'une équation polynômiale faisant intervenir les racines n-èmes de l'unité. Seule la deuxième question a été quasi-systématiquement traité lors de la préparation, et une candidate a présenté la résolution de la question 1, en oubliant de distinguer le cas $z = 1$ (comme toutes les candidates ayant traité cette question à la reprise). La résolution de l'équation $z^n = 1$ dans $\mathbb{C}$ a posé des problèmes à deux candidates. La question 3 a pu être partiellement résolue par deux candidates à la reprise.

Planche 11. Le premier exercice nécessitait de démontrer la formule des probabilités composées et de s'en servir pour calculer la probabilité de tirer que des tirages successifs sans remises dans une urnes soient identiques. Deux candidates ont obtenu la bonne formule pour la probabilité de tirer une boule blanche et une boule rouge au tirage i, et une très bonne candidate a obtenu l'équivalent demandé à la question (3) à la reprise.

Le deuxième exercice portait sur la diagonalisabilité des matrices de rang 1 en dimension 3. Deux candidates ont bien justifié l'écriture des matrices de rang 1 proposée à la question 1, et toutes ont pu s'en servir pour traiter les trois premières questions. À la question (4), deux candidates ont montré que 0 était la seule valeur propre de M et ont pu conclure à la reprise. Le jury signale qu'évoquer la non-diagonalisabilité des matrices nilpotentes sans savoir le justifier n'est pas une bonne idée. La question (5) a été résolue à la reprise par une candidate.

Planche 12. Le premier exercice, assez court, démontrait le lemme de Gronwall. La moitié des candidates a pu résoudre la deuxième question dès la préparation, mais aucune la dernière question. Cet exercice a cependant pu être résolu à la reprise pour presque toutes les candidates.

La majorité du deuxième exercice de probabilités, qui manipulait en particulier des fonctions indicatrices, a la plupart du temps été traitée dès la préparation (jusqu'à la question (5)). Les candidates ayant abordé la question (6) avaient commis des erreurs de calcul, corrigées à la reprise (cependant la question (6) n'a pas été résolue en totalité). Celles-ci ont donné des arguments intéressants pour la dernière question : « cela permet d'augmenter la variance, donc de discriminer davantage les candidates », « cela dépend de ce que vous voulez faire », « le risque est de donner à des candidats faibles de meilleures notes et inversement ». Elles n'ont cependant pas remarqué qu'une des explications pouvait être que les meilleures copies allaient recevoir une note encore meilleure, et les faibles copies une note encore plus faible, ni que cela impliquait de réduire le temps de correction.

L'exercice additionnel suivant a été posé à une candidate : on lance un dé ordinaire (à 6 faces et équilibré) jusqu'à obtenir un résultat égal à 6. En moyenne, combien de lancers fait-on ? Sachant que tous les lancers précédent le 6 ont donné un résultat pair, en moyenne, combien de lancers fait-on ?

Planche 13. Le premier exercice nécessitait de calculer les puissances et d'exhiber l'inverse d'une matrice carrée de taille n, en se servant du binôme de Newton. Une excellente candidate a traité l'intégralité de l'exercice dès sa préparation. Deux candidates ont obtenu une bonne expression pour A^n, les autres ont pu se corriger à la reprise et bien avancer dans l'exercice. L'étude de l'inversibilité de la matrice ne comportant que des 1 n'a pas toujours été immédiate.

Le second exercice, assez abstrait, manipulait des suites et des séries. Les candidates n'ont pas toujours d'emblée su exploiter la décroissance de u_n pour obtenir une minoration à la première question. L'exercice a été intégralement résolu à le reprise par deux candidates.

Planche 14. Le premier exercice mêlait algèbre et probabilités et conduisait à calculer la probabilité qu'une matrice dont certains coefficients sont des variables aléatoires, soit diagonalisable. La première question a en général été bien traité, la plupart des candidates ont d'emblée remarqué que la dimension du noyau ne pouvait prendre que deux valeurs. La seconde question a conduit les candidates à étudier la diagonalisabilité les matrices n'ayant qu'une seule valeur propre.

Le second exercice consistait en l'étude d'une fonction définie par une intégrale. La première question a conduit à des confusions chez la plupart des candidates, qui ont cherché à étudier l'intégrabilité de $1/\ln(t)$ sur $\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ alors qu'il fallait remarquer qu'on intégrait la fonction sur un intervalle borné ne contenant pas 1. Une très bonne candidate a bien avancé dans l'exercice, et la reprise a permis de compléter les limites dans le tableau de variations.

Planche 15. Le premier exercice étudiait une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec une fonction f non monotone, qui ne pouvait converger qu'en étant stationnaire à partir d'un certain rang. Les candidates ont toutes traité les deux premières questions, mais on eu du mal à justifier à la reprise pourquoi u_n devait converger vers un point fixe. La troisième question a été correctement traitée par deux candidates dès leur préparation et a pu être résolue dans tous les cas à la reprise. L'obtention d'une contradiction à la question 4 nécessitait un raisonnement plus sophistiqué qui n'a pu être abordé qu'avec une candidate. Le jury a posé la question supplémentaire suivante à une candidate ayant terminé l'exercice : si U_0 est une variable aléatoire uniforme sur $[-2, 1]$ quelle est la probabilité que la suite $U_{n+1} = f(U_n)$ converge ?

Le second exercice était un exercice d'algèbre court et astucieux, constitué d'une seule question. Il a été résolu correctement par une seule candidate dès sa préparation, les autres présentant les pistes qu'elles avaient considérées. Il a pu être résolu à la reprise par toutes les candidates avec plus ou moins d'indications.

Planche 16. L'objectif du premier exercice était d'obtenir un équivalent pour la probabilité que le quotient des numéros des boules prises dans deux urnes soit un nombre entier. Les candidates ont en général bien calculé les probabilités demandées à la première question, mais ont eu dû mal à préciser la modélisation adoptée (expliciter Ω) à la reprise. Ceci était utile pour résoudre la seconde question, découlant d'une bonne décomposition de l'événement E_n qui a pu être proposée par deux candidates à la reprise. À la troisième question, certaines candidates ont justement démontré que $\lfloor n/k \rfloor \sim n/k$ mais n'ont pas pensé à encadrer directement $\mathbb{P}(E_n)$.

Le deuxième exercice étudiait un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ construit à partir de la trace. Les trois premières questions ont été abordées par la plupart des candidates dès leur préparation. À la première question aucune candidate n'a pensé à justifier que l'image de f ne pouvait être nulle, ce qui a été clarifié à la reprise. Une candidate a pu exhiber à la reprise la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité demandée à la dernière question.