Banque Lettres et Sciences Économiques et Sociales

ENS Paris – Épreuve orale de mathématiques 2019

Jérémie Bettinelli, Émilie Kaufmann

Durée de l'épreuve : 1 heure de préparation et 30 min de passage (dont au plus 10 minutes laissées à la candidate ou au candidat).

Modalités : deux exercices indépendants à préparer. **calculatrice interdite**

1 Commentaires généraux

Cette année, 60 candidat·es ont passé l'épreuve orale de mathématiques. Le jury a été comme l'an passé enthousiasmé par leur niveau général : la moyenne des notes s'établit à 12.4 (contre 12.6 en 2018 et 11.6 en 2017). L'écart-type est de 4.2, ce qui est comparable à celui des années passées (4.3 en 2018 et 4.4 en 2017).

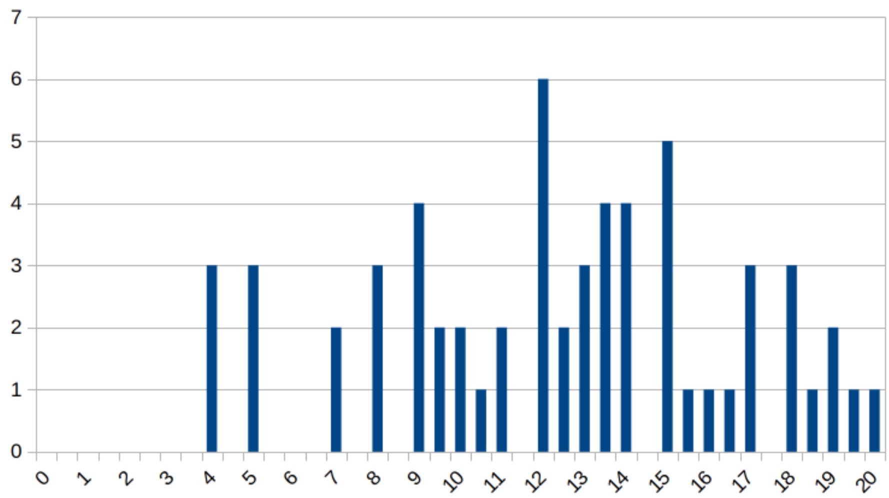

FIGURE 1 – Histogrammes des notes de l'oral.

Les candidat·es connaissent majoritairement plutôt bien leur cours, parviennent à résoudre des questions faciles de manière autonome, voire quelques questions plus difficiles avec des indications. On peut recenser 6 prestations témoignant de très grosses lacunes sur des notions importantes du programme, ayant obtenu les notes de $4/20$ et $5/20$. Mais 32% des candidat·es ont effectué une très bonne prestation et obtenu une note supérieure à 15/20 (contre 37% en 2018). Plusieurs excellent·es candidat·es ont impressionné le jury par leur maitrise des mathématiques. Ainsi, 8 candidat·es ont obtenu une note supérieure ou égale à 18 (contre 7 en 2018 et 5 en 2017). Parmi les 25 candidat·es sur liste principale d'admission, 13 ont eu au moins 15/20 (contre 15 en 2018 et 18 en 2017).

Nous tenons à féliciter les candidat·es ainsi que leurs professeur·es pour le travail accompli ; leurs efforts ont été récompensés.

Déroulement de l'épreuve. Les candidat·es disposent tout d'abord d'une heure pour préparer leur passage à l'oral. Chaque planche est constituée de deux exercices indépendants. Chaque couplage est construit dans un triple objectif d'équilibre : couverture thématique (analyse, algèbre, probabilités), difficulté (deux exercices moyens, ou bien un exercice facile ou court couplé avec un plus difficile ou long) et originalité. Comme les années précédentes, nous avons prêté une attention toute particulière à la progressivité des planches, qui contenaient toutes des questions faciles pour mettre en confiance les candidat·es, mais également des questions plus difficiles permettant aux meilleur·es candidat·es de s'exprimer. Mentionnons que, dans un souci d'équité, toutes les planches sont prêtes avant le début des épreuves, et sont distribuées selon un ordre aléatoire défini avant le début des oraux.

Le passage à l'oral, qui dure environ 30 minutes, se compose des deux phases suivantes.

— La *présentation* (10 minutes maximum) : la candidate ou le candidat présente sans intervention du jury les éléments résolus lors de sa préparation.

— La *reprise* (reste du temps) : le jury entame la discussion avec la candidate ou le candidat. Il revient d'abord sur ce qu'a écrit *et* dit la candidate ou le candidat afin de rectifier certaines erreurs ou corriger des maladresses. Ensuite, afin de tester les réactions et le recul, les examinateurs abordent les questions que la candidate ou le candidat n'a pas réussi à faire en donnant des indications. Dans le cas de très bons oraux, le jury n'hésite pas à poser des questions supplémentaires d'ouverture ne figurant pas dans la planche.

Dans l'ensemble, le déroulement de l'oral est très satisfaisant et permet au jury de bien évaluer les candidat·es en leur donnant l'opportunité de bien montrer tout ce qu'elles et ils savent faire dans les deux exercices proposés, voire davantage.

Analyse des notes. La note finale a été obtenue en prenant en compte les critères suivants : connaissance du cours, autonomie sur les questions de base et les questions difficiles, absence d'erreurs grossières, réactivité et capacité à se corriger lors de la reprise, intuition et rédaction mathématiques et avancement global à l'issue de la reprise.

Ces critères de notation ont amené aux types de prestations orales suivantes (quasiment identiques à celles de l'année dernière) :

— note ≤ 7 : le cours n'est pas bien maitrisé et plusieurs erreurs importantes sont commises.

— note entre 8 et 11 : le cours est plutôt maitrisé et/ou les candidat·es accumulent quelques erreurs, arrivent à traiter plusieurs questions de la planche, mais ne tirent pas vraiment profit de la reprise.

— note entre 12 et 14 : le cours est globalement bien maitrisé, les candidat·es ne commettent pas beaucoup d'erreurs et ont plutôt bien avancé dans la planche avec une aide conséquente du jury.

— note ≥ 15 : le cours est bien maitrisé, et les candidat·es ont bien avancé de manière autonome dans la planche et réagissent bien aux indications du jury.

Présence du public. Cette année, les oraux se sont bien déroulés. Rappelons que le public, qu'il s'agisse d'élèves, d'enseignant·es, ou autre, qu'il assiste à une épreuve ou qu'il reste dans les couloirs pendant une épreuve, doit respecter un silence total et ne manifester aucune réaction jusqu'à la sortie de la candidate ou du candidat, s'abstenant là encore de communiquer avec elle ou lui avant sa sortie des couloirs.

Évolution pour 2020. Il est à noter que les modalités vont changer l'année prochaine. Les candidat·es disposent dorénavant d' **une heure et demie** de préparation. En conséquence, la durée de la présentation passe de 10 minutes à **15 minutes**.

2 Conseils aux candidat·es

Certaines prestations pourraient être améliorées en prenant en compte les points suivants.

— Nous encourageons les candidat·es à écrire au tableau, surtout les indications données à la reprise. Les formules mathématiques énoncées oralement peuvent être ambivalentes et la simple écriture au tableau permet par exemple au jury de rectifier une erreur d'interprétation.

Toute prise d'initiative consistant à tenter des choses en les écrivant au tableau est **fortement valorisée**.

Il ne faut également pas hésiter à prendre le temps de la réflexion.

— Nous encourageons les candidat·es à mentionner les pistes concrètes tentées lorsqu'une question n'a pas pu être résolue.

— Le jury, toujours bienveillant, cherche à évaluer le plus justement les candidat·es et n'essaiera jamais de les « piéger ». En général, lorsque un·e candidat·e est laissé sans indication en silence, c'est que le jury estime qu'il ou elle est sur une bonne piste. Il est donc inutile, voire contre-productif, de s'arrêter, se retourner et chercher l'acquiescement du jury à chaque étape du raisonnement.

— Nous encourageons les candidat·es à se méfier de l'impression de leur prestation, qui ne reflète probablement pas leur note. Ainsi, quelle que soit sa préparation, un·e candidat·e ne doit jamais se démobiliser en croyant avoir raté son oral, alors que les attentes du jury ne sont pas exactement les mêmes sur tous les exercices.

Mentionnons également d'autres points importants.

— Il ne faut pas chercher à utiliser coute que coute les dix minutes lors de la présentation. Comme explicitement marqué sur l'énoncé, il est conseillé de ne pas trop entrer dans les détails de calculs. Il est toujours judicieux de présenter de manière concise les étapes importantes du raisonnement. En cas de doute, le jury reviendra sur les détails lors de la reprise. Certain·es candidat·es ont eu du mal à trouver le bon équilibre, détaillant parfois excessivement des calculs simples ou passant sous silence des points clés. D'autres, n'ayant traité que peu de questions en préparation, ont fait trainer en longueur la présentation pour remplir les dix minutes, ce qui n'a pu que les desservir. À l'inverse, les candidat·es ne doivent en aucun cas prendre plus de dix minutes pour l'exposé dans leur intérêt même, car ils réduisent inutilement leurs possibilités de profiter de l'interaction avec le jury pour avancer dans les exercices. Le cas échéant, le jury interrompra systématiquement l'exposé. Même si un·e candidat·e a beaucoup de choses à présenter, il est nécessaire de faire un choix dans les détails donnés (le jury demandera éventuellement des précisions).

Nous insistons sur le fait que la prestation orale est notée sur sa totalité. Ainsi, une présentation courte n'est pas pénalisée en soi, et elle laisse simplement plus de temps au candidat ou à la candidate pour améliorer sa note lors de la reprise. Celle-ci est très importante pour la détermination de la note : un·e candidat·e ayant bloqué sur des questions pourra obtenir une très bonne note s'il ou elle réussit à bien exploiter les indications données par le jury et montre une bonne maitrise des notions essentielles du programme sans dire ou écrire des assertions fausses.

— Une bonne gestion du tableau est primordiale pour un bon déroulement de l'oral, et le jury ne souhaite pas que le candidat ou la candidate efface le tableau pendant la première phase de l'oral. Ainsi, il faut éviter de commencer par écrire en plein milieu du tableau la réponse à la première question, puis demander au jury s'il est possible d'effacer. Lors de la reprise, il est important d'obtenir l'accord du jury avant se se mettre à effacer une partie du tableau. Il faut cependant mentionner que quasiment tout·es les candidat·es sont bien entrainés à cet exercice délicat, et arrivent à bien gérer le tableau.

— Lors de la reprise, nous conseillons aux candidat·es de ne pas être collés à leurs feuilles de brouillon pour tenter d'y dénicher les réponses aux questions du jury. Généralement le jury aura fait en sorte que tous les éléments nécessaires soient présents au tableau.

— Nous invitons les candidat·es à se méfier des « demi-souvenirs » qui peuvent amener à énoncer des énormités. Par ailleurs, l'emploi de notions hors-programme non maitrisées est lourdement sanctionné. Notons que le cas ne s'est pas présenté cette année.

3 Erreurs les plus fréquentes

Nous signalons ici quelques erreurs commises par plusieurs candidat·es dans différentes planches.

— Le théorème de la bijection est très rarement bien énoncé, les candidat·es omettent souvent la *stricte* monotonie.

— Plusieurs exercices invitaient les candidat·es à procéder par analyse et synthèse pour déterminer l'ensemble des fonctions vérifiant certaines conditions. Ces dernier·ères oublient alors systématiquement la synthèse.

— Deux matrices équivalentes n'ont pas nécessairement les même valeurs propres, au contraire de ce que pensent certain·es candidat·es.

— Le développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en zéro a été utilisé pour calculer une limite du type $(1+a_n)^{b_n}$.

— Les candidat·es peinent à justifier pourquoi la limite d'une suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$ est un point fixe de la fonction f.

— Dans le cadre d'un raisonnement par récurrence, il faut faire très attention aux quantificateurs à l'intérieur de l'hypothèse de récurrence.

— L'emploi du théorème du rang a donné lieu à plusieurs confusions sur la dimension de l'espace de départ.

— La notion de projection orthogonale n'est dans l'ensemble pas bien maitrisée par les candidat·es.

Petite curiosité cette année (mais qui n'impacte bien sûr pas les notes obtenues) : les candidat·es maitrisent parfois mal l'alphabet grec, dont nous avons pu entendre diverses permutations originales.

4 Commentaires planche par planche

Afin de préserver l'anonymat, par convention, nous utilisons le terme « candidate » pour désigner un élément de l'ensemble $\{\text{candidat}, \text{candidate}\}$. Chaque planche a été donnée à quatre candidates consécutives.

Planche 1. Le premier exercice étudiait une suite définie implicitement comme la solution d'une équation. Les candidates ont souvent oublié de mentionner la *stricte* croissante de la fonction f_n pour résoudre la première question, mais ont en général bien mené l'étude de la convergence de (x_n). Le raisonnement par l'absurde nécessaire pour obtenir la valeur de la limite a été proposé d'emblée par une candidate, et à pu être complété à la reprise dans les autres cas. Deux candidates ont voulu invoquer un « théorème du point fixe » pour une suite qui n'était pas du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Enfin, la dernière question n'a été correctement abordée que par une candidate.

Le deuxième exercice présentait un modèle probabiliste de l'efficacité d'un médicament, dans le but de donner une expression de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans ce modèle. L'exercice a été résolu presque intégralement par une candidate dès sa préparation. Il a donné lieu à quelques erreurs de calcul dans d'autres cas, mais les cinq premières questions ont en général pu être résolues à la reprise.

Planche 2. Le premier exercice étudiait les *pseudo-solutions* d'une équation du type $AX = B$, liées à la projection orthogonale du vecteur b de coordonnées B sur l'image de l'endomorphisme associé à A. La troisième question a posé de grosses difficultés aux candidates. Deux d'entre elles ont proposé de dériver une fonction définie sur $\mathbf{R}^3$. Nous avons pu clarifier la notion de "projeté" (souvent timidement mentionnée par les candidates) à la reprise. Cette question a cependant été résolue par une très bonne candidate dès sa préparation ; elle a ensuite pu bien avancer dans l'exercice.

Le deuxième exercice étudiait la loi d'une variable aléatoire à densité, et proposait une méthode pour générer des échantillons ayant cette distribution. Il a pu être dans la plupart des cas résolu à la reprise, en corrigeant quelques erreurs d'intégration, notamment de la part des candidates ayant choisi d'effectuer le changement de variables $u = e^{-t}$ (qui n'était pas indispensable), et en clarifiant les hypothèses du théorème de la bijection. Les candidates ont éprouvé quelques difficultés à reconnaitre la fonction de répartition de la variable aléatoire X à la question 4, mais ont ensuite pu terminer l'exercice.

Planche 3. Le premier exercice étudiait une variable aléatoire dont la densité était définie par morceaux, et de calculer la loi d'une transformée simple de cette variable aléatoire. L'exercice a été dans l'ensemble bien compris et bien réussi. La cinquième question a posé des difficulté à une candidate. Nous avons constaté que les candidates pensaient rarement à préciser le graphique de la fonction f à l'aide de tangentes bien choisies.

Le second exercice, plus astucieux, n'a été résolu correctement que par une candidate dès sa préparation, et nous avons pu résoudre la première question à la reprise dans tous les cas. La seconde question, plus simple que la première, n'a malheureusement pas été tentée par les candidates n'ayant pas réussi la première question. Nous avons parfois posé la question supplémentaire suivante : l'application v restreinte à $\mathrm{Im}(u)$ est-elle un endomorphisme ?

Planche 4. Le premier exercice étudiait un mécanisme aléatoire de changement de chaise, et cherchait à approcher la « loi limite » de la chaise sur laquelle un individu se trouvait. La relation de récurrence sur (p_n) a été obtenue par toutes les candidates, qui ont pour deux d'entre elles su correctement étudier la suite arithmético-géométrique associée dès leur préparation. Les calculs d'espérance demandés dans les deux dernières questions ont été plus laborieux, et aucune candidate n'a pu terminer l'exercice. Personne n'a observé que $X_\infty - 1$ était une variable de Bernoulli.

Le second exercice avait pour but de déterminer la droite vectorielle sur laquelle projeter orthogonalement un ensemble de vecteurs de sorte à maximiser les distances entre les projections. La question (1) qui ne mobilisait que la définition d'une projection orthogonale a dû systématiquement être clarifiée à la reprise, et les candidates ont à peine abordé la seconde question. L'utilisation de la linéarité pour montrer que le barycentre de l'ensemble $\mathcal{F}_u$ était le vecteur nul a nécessité beaucoup d'aide de la part du jury.

Planche 5. Le premier exercice s'intéressait à une version biaisée par la taille d'une loi discrète. Il s'agissait de caractériser les lois pour lesquelles la version biaisée était égale à la loi de la variable à laquelle on ajoute 1. Les candidates ont bien réussi le sens direct mais la réciproque (qui nécessitait une récurrence simple) n'a jamais été traitée dès la présentation.

Le second exercice étudiait un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[x]$ dont la définition faisait intervenir des intégrales. La linéarité a été dans l'ensemble bien vérifiée même si les candidates ont oublié de mentionner que Φ_P était bien une fonction polynomiale. La question (2) n'a pas pu être correctement résolue, ce qui n'empêchait de poursuivre l'exercice. Pour la dernière question, la condition suffisante $\alpha \neq 0$ a été mentionnée par certaines candidates, et nous avons pu conclure à la reprise avec l'une d'entre elles.

Planche 6. Le premier exercice modélisait une expérience aléatoire où un gardien choisissait des clés indiscernables dans un trousseau. La première question avait été bien traitée par trois candidates dès leur préparation, mais elles ont eu du mal à justifier convenablement leurs calculs. Dans la plupart des cas, la dernière question n'a été résolue qu'à la reprise, et sa résolution a parfois donné lieu à des erreurs dans la formule des probabilités totales et dans la formule de Bayes. Deux candidates avaient toutefois spontanément introduit une variable aléatoire X qui comptait le nombre de clés utilisées.

Le deuxième exercice étudiait une suite de matrices diagonalisables qui "convergeait" vers la "racine carrée" d'une matrice. Il a été intégralement résolu par une excellente candidate, avec qui nous avons de plus pu prouver la convergence de la suite $(\lambda_{n,i})_{n\in\mathbf{N}}$. Dans les autres cas, la question (1) a, de manière surprenante, posé des difficultés, et seule la question (2) a ensuite pu être abordée à la reprise.

Planche 7. Le première exercice étudiait une suite de fonctions définies sur $[0,1]$ dont la limite était une fonction continue. Les deux premières questions nécessitaient des raisonnements par récurrence où l'hypothèse de récurrence incluait un "pour tout $x \in [0,1]$", proposés d'emblée par deux candidates mais avec des erreurs dans le second, corrigées à la reprise. La question (4) a posé des difficulté et certaines candidates ont écrit des majoration fausses avant que nous leur suggérions d'écrire $f(x) - f(y)$ comme une limite.

Le deuxième exercice étudiait un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$. Les candidates ont eu des difficulté pour la détermination du noyau, que nous avons pu clarifier la reprise. Comme remarqué par une candidate, le noyau pouvait se deviner en lisant l'énoncé de la question (4). Le théorème du rang a ensuite été appliqué mais nous avons dû corriger la dimension de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ dans deux cas. Pour la question (3) nous avons dû corriger quelques erreurs de calcul à la reprise, et les candidates ont en général pu aboutir à une expression correcte. Nous avons pu ensuite aborder les questions suivantes avec trois candidates, sans toutefois résoudre complètement l'exercice.

Planche 8. Le premier exercice étudiant la loi de l'heure d'arrivée de la première et la seconde convives parmi deux convives arrivant uniformément au hasard sur une plage de deux heures. La plupart des candidates ont remarqué qu'il s'agit de calculer la loi du maximum puis du minimum de deux variables aléatoires indépendantes, ce qu'elles savent faire, à quelques erreurs de calcul près. Pour la dernière question, deux candidates avaient vu qu'il s'agissait de calculer l'espérance de $U - V$, et les autres nous ont proposé l'expression équivalente $|X - Y|$ mais qu'elles ne savent pas calculer.

Le deuxième exercice cherchait à caractériser les fonctions vérifiant l'égalité dite du parallélogramme. La première question a déstabilisé les candidates, qui l'ont tout de même essentiellement bien traitée. Les questions suivantes ont été plutôt réussies, et les questions (5) et (6) ont dues systématiquement être traitées ou complétées à la reprise.

Planche 9. Le premier exercice proposait une caractérisation des involutions en terme d'une condition sur des rangs. Il a été plutôt bien réussi dans l'ensemble, seule la question 3 a posé quelques difficultés, mais les candidates ont toujours pu conclure à la reprise.

Le second exercice faisait manger des bonbons à Camille jusqu'à ce qu'une de ses boites soit vide [1]. Nous rappelons que pour ce genre d'exercice, il est souhaitable d'introduire des évènements convenables, ce qui a été proposé spontanément par quelques candidates. La question (4) n'a jamais pu être complètement résolue, mais deux candidates nous ont proposé d'elles-même une résolution correcte de la cinquième question.

Planche 10. Le premier exercice cherchait à caractériser les lois discrètes telles que le minimum et la différence de deux copies indépendantes aient même loi. Peu de candidates se

1. Pour votre santé, éviter de manger trop gras, trop salé, trop sucré, et faites plus de mathématiques : www.manger-bouger.fr.

sont rendues compte que V prenait des valeurs négatives, malgré la question (3). La question (5) n'a pu être abordée qu'avec une candidate, que nous avons aidée à conclure.

L'exercice 2 proposait une démonstration de l'inégalité de Cauchy–Schwarz en considérant une fonction polynomiale positive. Il a été globalement bien mené par les candidates. Une mauvaise gestion du temps de présentation a conduit deux candidates qui avait pourtant traité l'exercice à ne pas pouvoir le présenter.

Planche 11. Cet exercice cherchait à caractériser les fonctions vérifiant certaines conditions en procédant par analyse (synthèse). Les deux premières questions ont mis en avant des lacunes sur la positivité de l'intégrale. Pour la suite, aucune candidate n'a observé d'elle-même que $f'f = (f^2/2)'$ malgré l'exercice 2 qui demandait de dériver f^2 en première question. Par ailleurs seule une candidate a pensé spontanément à la constante d'intégration. Enfin, personne n'a pensé à faire la synthèse une fois l'expression de f trouvée à la question (3), et ce malgré l'insistance du jury.

Le deuxième exercice portait sur un système de deux suites dont on proposait une écriture faisant intervenir des expressions trigonométriques pour faciliter le calcul du terme général des suites. La résolution de la question (2)(b) a nécessité beaucoup d'aide de la part du jury, et une seule candidate a fait le lien entre cette question et la suivante.

Planche 12. Le premier exercice avait pour but de calculer les puissances d'une matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbf{R})$ diagonalisable et n'ayant qu'une valeur propre non nulle. Cette exercice pouvait se traiter de manière astucieuse en faisant très peu de calcul, ce qui n'a été observé par aucune candidate. Dans la plupart des cas, nous avons pu obtenir une expression simple de A^n en fonction de A à la reprise.

Le second exercice visait à calculer l'espérance et la variance du maximum de deux variable aléatoires gaussiennes. Pour la première question, certaines candidates ont essayé de se rappeler une valeur plutôt que de se laisser guider par l'exercice. Toutes les candidates ont pensé à utiliser une intégration par parties pour résoudre la question (3), que nous avons généralement dû reprendre ensuite. La question (6) n'a jamais été abordée.

Planche 13. Toutes les candidates ont commencé par l'exercice 2, qui étudiait un mécanisme aléatoire de choix de pâtes au restaurant. Il a été plutôt bien réussi par les candidates, et seule la dernière question a vraiment due être clarifiée à la reprise. Les candidates n'ont pas remarqué qu'il n'était pas nécessaire de calculer la matrice P^{-1} mais seulement $P^{-1}X_1$.

Cet exercice était couplé à un exercice plus déstabilisant pour les candidates, où elles amenées à déterminer l'ensemble des fonctions vérifiant une condition faisant intervenir une intégrale. Deux candidates avaient toutefois d'emblée pensé à dériver la relation, et avait bien progressé dans leur analyse. Dans ce genre de raisonnement, les candidates oublient systématiquement de faire la synthèse une fois l'analyse terminée.

Planche 14. Le premier exercice présentait un exemple de mélange de deux lois normales. La plupart des candidates ont correctement utilisé la formule des probabilité totale puis la formule de Bayes pour résoudre les premières questions, mais n'ont pas toujours su exprimer le résultat en fonction des valeurs de la fonction F données dans l'énoncé. Deux candidates ont pu aller au bout des calculs et ont pu commenter la valeur de la variance obtenue.

Le deuxième exercice cherchait à donner une représentation matricielle des endomorphismes de $\mathbf{R}^{3n}$ de rang $2n$ tels que $u^3 = 0$. Toutes les candidates ont pu finaliser la résolution de la première question à la reprise. Elle nécessitait plusieurs emplois du théorème du rang, qui ont conduit à quelques erreurs sur la dimension de l'espace de départ. La seconde question n'a jamais pas pu être terminée complètement.

Planche 15. Le premier exercice s'intéressait aux fonctions de une ou deux variables ayant un unique extrémum local. La question (1), assez inhabituelle, n'a souvent correctement abordée qu'à la reprise. En revanche, les candidates avaient bien progressé dans la résolution de la question (2), même si les question (d) et (e) ont parfois nécessité quelques clarifications. Une candidate nous a spontanément proposé un exemple (presque) correct à la question (3).

Le second exercice modélisait une situation où un organisateur d'évènement cherche à exploiter le fait que les spectateurs ont une probabilité de ne pas se présenter pour mettre en vente plus de billets. Il a bien plutôt bien traité par les candidates dès leur préparation, à l'exception parfois de la dernière question. Il est à souligner que pour des questions où les formules à démontrer sont données dans l'énoncé, le jury s'attend à des justifications précises.

Nous avons de plus posé l'exercice supplémentaire suivant pour une candidate : caractériser les endomorphismes de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ dont le noyau est égal à l'image.