*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

* * *

*Exercice 1.* Soit $n \geq 2$. On pose $f_n(x) = x^n + x - 1$ pour tout $x \geq 0$.

*(1)* Montrer qu'il existe un unique nombre réel $x \geq 0$ tel que $f_n(x) = 0$. On le notera $x_n$.

*(2)* Quel est le signe de $f_{n+1}(x_n)$ ?

*(3)* Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $1$.

*(4)* Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{\ln(n)}{n}\right)^n = 1$.

*(5)* En déduire qu'à partir d'un certain rang, $1 - \dfrac{\ln(n)}{n} < x_n < 1$.

* * *

*Exercice 2.* Dans le contexte d'une étude clinique, on cherche à prévoir l'efficacité d'un médicament en fonction du profil d'un·e patient·e. L'étude fait intervenir $n$ patient·es et à la $k$-ème personne est associé un profil qui prend la forme d'un vecteur $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^d$. Soit $Y_k$ la variable aléatoire qui vaut $1$ si le médicament est efficace pour le $k$-ème individu, et $-1$ si ce médicament n'est pas efficace. On suppose que les réactions des différent·es patient·es au médicament sont indépendantes, et qu'il existe un vecteur $\theta \in \mathbf{R}^d$ tel que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \frac{1}{1 + e^{-\langle \mathbf{x}_k, \theta \rangle}} ,$$

où $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbf{R}^d$.

*(1)* Étudier les variations de la fonction $\sigma : x \in \mathbf{R} \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ et tracer sa courbe représentative.

*(2)* Pour quel·les patient·es le médicament est-il très efficace ? Très peu efficace ?

*(3)* Soient $y_1, \ldots, y_n \in \{-1, 1\}$. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}(Y_k = y_k) = \frac{1}{1 + e^{-y_k \langle \mathbf{x}_k, \theta \rangle}} .$$

*(4)* En déduire $\mathbb{P}(Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n)$, la probabilité sous le modèle d'obtenir les observations $y_1, \ldots, y_n$.

*(5)* Montrer que le paramètre $\theta$ qui maximise cette probabilité est un point où la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^d & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \theta & \mapsto & \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + e^{-y_k \langle \mathbf{x}_k, \theta \rangle}\right) \end{array}$$

atteint son minimum.

*(6)* Pour $d = 2$, exprimer le vecteur $(\partial_1 f(\theta), \partial_2 f(\theta))$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

* * *

*Exercice 1.* On considère une matrice $A \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ et un vecteur de coordonnées $B \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*(1)* Donner le rang de $A$ et déterminer une base de son noyau.

*(2)* L'équation $AX = B$ admet-elle une solution ?

On note $u$ l'endomorphisme associé à la matrice $A$ et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ le vecteur de coordonnées $B$ dans la base canonique. En notant $||\cdot||$ la norme euclidienne associée au produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$, on définit l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \mathbf{x} & \longmapsto & ||u(\mathbf{x}) - \mathbf{b}||^2 \end{array}$$

*(3)* Montrer que l'application $f$ admet un minimum. Y a-t-il un unique minimiseur ?

*(4)* Montrer que $\mathbf{x}$ minimise $f$ si et seulement si $(\mathbf{b} - u(\mathbf{x})) \in \mathrm{Im}(u)^\perp$.

*(5)* En déduire que $\mathbf{x}$ minimise $f$ si et seulement si ses coordonnées $X \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ vérifient $A^\mathrm{T} AX = A^\mathrm{T} B$.

*(6)* Calculer l'ensemble des minimiseurs de $f$, dont les coordonnées sont appelées *pseudo-solutions* de l'équation $AX = B$.

* * *

*Exercice 2.* Soit $X$ une variable aléatoire admettant une densité $f : x \in \mathbf{R} \mapsto \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

*(1)* Justifier que $f$ définit bien une densité de probabilité.

*(2)* Calculer la fonction de répartition de $X$.

*(3)* Soit $\phi : x \in \mathbf{R} \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1}$. Montrer que $\phi$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0, 1[$ et calculer $\phi^{-1}$.

*(4)* Soit $U$ une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.
Donner la loi de la variable aléatoire $\phi^{-1}(U)$.

*(5)* Proposer une procédure pour obtenir $n$ réalisations indépendantes ayant la loi de $X$ à partir d'appels à la fonction rand() d'un ordinateur, qui produisent des échantillons indépendants de loi uniforme.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

* * *

*Exercice 1.* Un escargot se déplace à une vitesse aléatoire $V$ (exprimée en m/h). On considère que $V$ est une variable aléatoire dont la densité est la fonction suivante :

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \kappa & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \dfrac{\kappa}{x^4} & \text{si } 1 \leq x, \end{cases}$$

où $\kappa$ est une constante à déterminer.

*(1)* Représenter graphiquement l'allure de la fonction $f$.

*(2)* Montrer que $\kappa = \dfrac{3}{4}$.

*(3)* Calculer la vitesse moyenne de l'escargot, ainsi que la variance de sa vitesse.

*(4)* Calculer la fonction de répartition de $V$.

*(5)* L'escargot veut se rendre de son domicile à son lieu de travail qui est situé à 2m. Le temps nécessaire pour effectuer ce parcours est noté $T$, et on rappelle que $T = \dfrac{2}{V}$. Donner la fonction de répartition de $T$.

*(6)* En déduire la densité de $T$.

* * *

*Exercice 2.* Soit $u$, $v$ et $w$ trois endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ qui vérifient $u^3 = 0$, $v^3 = 0$ et $w^3 = 0$.

*(1)* On suppose dans cette question que $u$ est différent de l'endomorphisme nul et que $u$ et $v$ commutent, c'est-à-dire que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\mathrm{rg}(u \circ v) < \mathrm{rg}(u)$.

*Indication.* On pourra considérer la restriction de $v$ à un sous-espace vectoriel bien choisi.

*(2)* On suppose dans cette question que $u$, $v$ et $w$ commutent deux à deux. Montrer que $u \circ v \circ w = 0$.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

* * *

*Exercice 1.* Soient $a$, $b \in \, ]0,1[$. Une personne peut s'assoir sur deux chaises que l'on appelle « chaise 1 » et « chaise 2 ». Toutes les heures, elle décide ou non de changer de place en appliquant la règle suivante :

— si elle est sur la chaise 1, elle passe sur la chaise 2 avec probabilité $a$ et reste sur la chaise 1 avec probabilité $1-a$;

— si elle est sur la chaise 2, elle passe sur la chaise 1 avec probabilité $b$ et reste sur la chaise 2 avec probabilité $1-b$.

Pour $n \geq 0$, on note $X_n$ la variable aléatoire donnant le numéro de la chaise sur laquelle elle est assise au bout de $n$ heures.

*(1)* Soit $n \geq 1$. Pour $1 \leq i, j \leq 2$, exprimer $\mathbb{P}(X_{n+1} = i \mid X_n = j)$.

*(2)* Pour $n \geq 0$, on pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$. Exprimer $p_{n+1}$ en fonction de $p_n$.

*(3)* Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{b}{a+b}$.

Soit $X_\infty$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{1,2\}$ dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X_\infty = 1) = \dfrac{b}{a+b}$.

*(4)* Calculer $\mathbb{E}[X_\infty]$. Commenter le cas $a = b$.

*(5)* On reprend l'expression trouvée en *(4)* que l'on note $\mathbb{E}[X_\infty] = \varphi(a,b)$. Soit $A$ une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. Calculer $\mathbb{E}[\varphi(A,b)]$.

*(6)* On reprend l'expression trouvée en *(5)* que l'on note $\mathbb{E}[\varphi(A,b)] = \psi(b)$. Soit $B$ une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. Calculer $\mathbb{E}[\psi(B)]$.

* * *

*Exercice 2.* Dans cet exercice, $\langle x, y\rangle$ désigne le produit scalaire entre deux vecteurs $x$ et $y$ de $\mathbf{R}^d$ et $||\cdot||$ désigne la norme euclidienne associée. Pour tout ensemble $\mathcal{E} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de $n$ vecteurs de $\mathbf{R}^d$, on définit l'inertie de $\mathcal{E}$ comme la moyenne des distances au carrés des vecteurs de $\mathcal{E}$ à leur barycentre :

$$\mathcal{I}(\mathcal{E}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ||x_i - \overline{x}(\mathcal{E})||^2,$$

où $\overline{x}(\mathcal{E}) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Dans la suite de l'exercice, on fixe un ensemble $\mathcal{E}$ de $n$ vecteurs vérifiant $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Soit $u$ un vecteur de $\mathbf{R}^d$ tel que $||u|| = 1$. $p_u : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ la projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par $u$.

*(1)* Montrer que $p_u(x) = \langle x, u\rangle u$.

*(2)* Calculer l'inertie de l'ensemble $\mathcal{F}_u = \{p_u(x_1), \ldots, p_u(x_n)\}$ obtenu par projection des vecteurs de l'ensemble $\mathcal{E}$ sur Vect$(u)$. Montrer qu'il existe un endomorphisme $f$ de $\mathbf{R}^d$ que l'on précisera tel que

$$\mathcal{I}(\mathcal{F}_u) = \langle u, f(u)\rangle.$$

*(3)* On admet que l'endomorphisme $f$ admet une base orthonormée de vecteurs propres. Montrer que

$$\max_{u\in\mathbf{R}^d,\, \|u\|=1} \mathcal{I}(\mathcal{F}_u) = \lambda_{\max}$$

où $\lambda_{\max}$ est la plus grande valeur propre de $f$. Pour quel vecteur $u$ ce maximum est-il atteint ?

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

* * *

*Exercice 1.* Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, telle que $\mathbb{P}(X > 0) > 0$, et qui admet une espérance. On considère une variable aléatoire $\widehat{X}$ dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}\left(\widehat{X} = i\right) = \frac{i\,\mathbb{P}(X = i)}{\mathbb{E}[X]}$$

pour tout entier $i \geq 0$.

*(1)* On suppose que $X$ suit une loi de Poisson. Montrer que $X + 1$ et $\widehat{X}$ ont la même loi.

*(2)* Réciproquement, on suppose que $X + 1$ et $\widehat{X}$ ont la même loi. Montrer que $X$ suit une loi de Poisson.

*(3)* Est-ce que $X$ et $\widehat{X}$ peuvent avoir la même loi ?

* * *

*Exercice 2.* On fixe un entier naturel $n \geq 1$ et on considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}_n[x]$ des fonctions polynomiales de degré au plus $n$. Soit $A$ une fonction polynomiale fixée de $\mathbf{R}_n[x]$ non nulle. On définit l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbf{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[x] \\ & P & \longmapsto & \Phi_P \end{array}$$

où la fonction polynomiale $\Phi_P$ est définie par

$$\Phi_P(x) = A(x) \times \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t - P(x) \times \int_0^1 A(t)\mathrm{d}t.$$

Dans la suite, on notera $\alpha = \int_0^1 A(t)\mathrm{d}t$ et $Id$ l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}_n[x]$.

*(1)* Montrer que l'application $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[x]$.

*(2)* Soit $\lambda$ une valeur propre de $\Phi$. Montrer que $\lambda \in \{0, -\alpha\}$.

*(3)* Montrer que $\mathrm{Im}(\Phi + \alpha Id) \subseteq \mathrm{Ker}(\Phi)$.

*(4)* En déduire que pour $\alpha \neq 0$, on a $\mathrm{Ker}(\Phi + \alpha Id) \oplus \mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbf{R}_n[x]$.

*(5)* À quelle condition l'endomorphisme $\Phi$ est-il diagonalisable ?

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

* * *

*Exercice 1.* Un gardien de nuit dispose de 10 clés, indiscernables dans l'obscurité, et dont une seule permet d'ouvrir une certaine porte. Selon son état, il a deux méthodes possibles pour ouvrir la porte :

**A.** À jeun, il effectue des essais successifs en retirant les clés déjà essayées.

**B.** Ivre, à chaque nouvel essai, il utilise une clé prise au hasard parmi les 10 clés.

On note $X_{\mathbf{A}}$ le nombre de clés essayées (y compris la bonne) avant d'ouvrir la porte dans le cas **A.**. De même, on note $X_{\mathbf{B}}$ le nombre de clés essayées (y compris la bonne) avant d'ouvrir la porte dans le cas **B.**.

*(1)* Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_{\mathbf{A}}$ et son espérance.

*(2)* Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_{\mathbf{B}}$ et son espérance.

*(3)* On sait que le gardien est ivre un jour sur quatre. Un jour, après avoir essayé 8 clés, il n'a toujours pas ouvert la porte. Calculer la probabilité pour qu'il soit ivre. *On donnera une formule numérique que l'on ne cherchera pas à évaluer.*

* * *

*Exercice 2.* Soit $A$ une matrice diagonalisable de $\mathbf{M}_d(\mathbf{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives. On définit la suite de matrices

$$\left\{\begin{array}{rcl} R_0 & = & I_d \\ R_{n+1} & = & \frac{1}{2}(R_n + AR_n^{-1}), \end{array}\right.$$

où $I_d$ désigne la matrice identité de $\mathbf{M}_d(\mathbf{R})$.

*(1)* Justifier que toute matrice diagonalisable à valeurs propres strictement positive est inversible.

*(2)* Montrer qu'il existe une matrice inversible $P$ telle que pour tout $n$, $R_n = PD_nP^{-1}$ avec $D_n$ une matrice diagonale à termes diagonaux strictement positifs.

Dans la suite on note $D_n = \begin{pmatrix} \lambda_{n,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n,d} \end{pmatrix}$.

*(3)* Pour $i \in \{1, \ldots, d\}$, donner une relation de récurrence vérifiée par la suite $(\lambda_{n,i})_{n\in\mathbf{N}}$.

*(4)* On admet que la suite $(\lambda_{n,i})_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,i}$ ?

*(5)* Montrer que les coefficients de la matrice $R_n$ convergent vers les coefficients d'une matrice $R$ qui vérifie $R^2 = A$.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

* * *

*Exercice 1.* Pour tout $x \in [0,1]$, on définit la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ de la manière suivante. On définit la fonction $f_0 : x \in [0,1] \mapsto 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x \in [0,1]$,

$$f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t-t^2)\mathrm{d}t\,.$$

*(1)* Soit $x \in [0,1]$ fixé. Étudier le sens de variation de $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$.

*(2)* Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, pour tout $x \in [0,1]$, $1 + x \leq f_n(x) \leq e^x$.

*(3)* Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite que l'on notera $f(x)$.

*(4)* Montrer que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq e\,|x-y|\,.$$

*(5)* En déduire que la fonction $x \mapsto f(x)$ est continue sur $[0,1]$.

* * *

*Exercice 2.* Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On note $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à $n$ lignes et $n$ colonnes et on définit

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbf{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{M}_n(\mathbf{R}) \\ & M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(M)I_n + M \end{array},$$

où l'on note $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de la matrice $A$ et $I_n$ la matrice identité de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$.

*(1)* Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$.

*(2)* Déterminer le noyau de $\Phi$ et donner son rang $\mathrm{rg}(\Phi)$.

*(3)* Calculer $\Phi \circ \Phi$ et l'exprimer en fonction de $\Phi$ et de l'endomorphisme identité de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$, noté *Id*.

*(4)* Soit $\lambda$ un valeur propre de $\Phi$. Montrer que $\lambda = 1$ ou $\lambda = n+1$.

*(5)* Montrer que $\Phi$ est diagonalisable.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

* * *

*Exercice 1.* Manon et Jennifer arrivent chez Delphine, entre 19h et 21h. On suppose que les instants d'arrivée sont des variables aléatoires $X$ et $Y$ indépendantes, uniforme sur $[0, 2]$, l'instant $0$ correspondant à 19h, l'unité de temps étant l'heure.

*(1)* Soit $U$ la variable aléatoire représentant l'heure à laquelle les deux convives sont arrivées chez Delphine. Déterminer la fonction de répartition de $U$ et la densité de probabilité de $U$.

*(2)* Soit $V$ la variable aléatoire représentant l'heure à laquelle la première arrive chez Delphine. Déterminer la densité de probabilité de $V$.

*(3)* Combien de temps en moyenne la première convive attend-elle l'arrivée de la seconde ?

* * *

*Exercice 2.* On considère un espace vectoriel $E$ et une application $\varphi : E \to \mathbf{R}$ telle que

$$\varphi(x + y) + \varphi(x - y) = 2\big(\varphi(x) + \varphi(y)\big)$$

et, de plus, on suppose que $\varphi(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

*(1)* L'application $\varphi$ peut-elle être linéaire ?

*(2)* Montrer que, pour tout $x \in E$, $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

On définit l'application $f : E \times E \to \mathbf{R}$ par

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x + y) - \varphi(x - y)}{4}\,.$$

*(3)* Montrer que $f(x, x) = 0 \iff x = 0$.

*(4)* Montrer que $f$ est symétrique, au sens où, pour tout $x, y \in E$, $f(x, y) = f(y, x)$.

*(5)* Montrer que, pour tout $x$, $y$, $z \in E$,

$$f(x + y, z) + f(x - y, z) = 2f(x, z) \qquad \text{et} \qquad f(2x, z) = 2f(x, z)\,.$$

*(6)* En déduire que $f$ est additive en chaque variable, c'est-à-dire que, pour tout $u$, $v$, $w \in E$,

$$f(u, w) + f(v, w) = f(u + v, w) \qquad \text{et} \qquad f(u, v) + f(u, w) = f(u, v + w)\,.$$

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

* * *

*Exercice 1.* Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$. On note $Id$ l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^n$.

*(1)* Montrer que $\mathrm{Ker}(Id + u)$ et $\mathrm{Ker}(Id - u)$ sont en somme directe.

*(2)* On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(Id + u) + \mathrm{rg}(Id - u) = n$.

- *(a)* Montrer que $\mathrm{Ker}(Id + u) \oplus \mathrm{Ker}(Id - u) = \mathbf{R}^n$.
- *(b)* Montrer que $u^2 = Id$.

*(3)* Réciproquement, on suppose que $u^2 = Id$. Montrer que $\mathrm{rg}(Id + u) + \mathrm{rg}(Id - u) = n$.

* * *

*Exercice 2.* Camille a dans son sac deux paquets de bonbons opaques et indiscernables. Initialement, le paquet $\mathbf{A}$ contient $a \in \mathbf{N}^\star$ bonbons et le paquet $\mathbf{B}$ en contient $b \in \mathbf{N}^\star$. Camille choisit un paquet au hasard, mange un bonbon et, si le paquet n'est pas vide, le remet dans son sac, ou le jette s'il est vide. Le procédé est réitéré jusqu'à ce qu'un des paquets soit jeté. On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de bonbons mangés.

*(1)* Quelles sont les valeurs que peut prendre $X$ ?

*(2)* Dans le cas $a = b$, quelle est la probabilité de jeter le paquet $\mathbf{A}$ ?

*(3)* Dans le cas $a = 1$, quelle est la probabilité de jeter le paquet $\mathbf{A}$ ?

*(4)* Déterminer la loi de $X$.

*(5)* Dans le cas $a = 2$ et $b \geq 2$, quelle est la probabilité de jeter le paquet $\mathbf{A}$ ?

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

* * *

*Exercice 1.* On considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ à valeurs dans $\mathbf{N}^\star$, indépendantes et de même loi. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = X - Y$.

**Première partie.** On suppose dans cette partie que $X$ et $Y$ suivent la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$.

*(1)* Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, on a $\mathbb{P}(U > k) = (1-p)^{2k}$ et calculer la loi de $U$.

*(2)* Soit $\ell \in \mathbf{N}$. Calculer $\mathbb{P}([V = \ell] \cap [Y = k])$ pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$ et en déduire que $\mathbb{P}(V = \ell) = \dfrac{p\,(1-p)^\ell}{2-p}$.

*(3)* En déduire la loi de $V$.

*(4)* Montrer que les variables aléatoires $U$ et $V$ sont indépendantes.

**Seconde partie.** On suppose à présent que $U$ et $V$ sont indépendantes et, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\mathbb{P}(X = n) \neq 0$. On pose $r = \dfrac{\mathbb{P}(V=1)}{\mathbb{P}(V=0)}$.

*(5)* Montrer que $X$ et $Y$ suivent la loi géométrique de paramètre $1 - r$.

*Indication.* On pourra exprimer de deux façons différentes le rapport $\dfrac{\mathbb{P}([X = n+1] \cap [Y = n])}{\mathbb{P}([X = n] \cap [Y = n])}$.

* * *

*Exercice 2.* On fixe $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$, on note $\|\cdot\|$ la norme usuelle sur $\mathbf{R}^n$ et on considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \|\mathbf{a} + x\mathbf{b}\|^2 \end{array}.$$

*(1)* Montrer que $f$ est une fonction polynomiale positive de degré au plus $2$.

*(2)* En déduire que $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle| \leq \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

* * *

*Exercice 1.* Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions dérivables $f : [0,1] \to \mathbf{R}_+^\star$ telles que

$$\frac{f(1)}{f(0)} = e \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)^2} + \int_0^1 f'(x)^2 \mathrm{d}x \leq 2\,.$$

Soit $f$ une telle fonction.

*(1)* Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left(f'(x) - \frac{1}{f(x)}\right)^2 \mathrm{d}x = 0\,.$

*(2)* Montrer que $f'(x)f(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$.

*(3)* En déduire une expression simple de $f$.

* * *

*Exercice 2.* On considère deux fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ g(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \begin{cases} f'(x) = g(x) \\ g'(x) = -f(x) \end{cases}.$$

*(1)* Montrer que la fonction $h : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x)^2 + g(x)^2$ est constante.

*(2)* On fixe un réel $\delta > 0$ et on introduit les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 0, \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \delta\, b_n \\ b_{n+1} = b_n - \delta\, a_n \end{cases}.$$

*(a)* Étudier la suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $c_n = a_n^2 + b_n^2$.

*(b)* Montrer qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ -\delta & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1+\delta^2} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

*(c)* En déduire les valeurs de $a_n$ et $b_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

*(3)* On suppose dorénavant que $\delta = \dfrac{T}{n}$ pour un certain réel $T > 0$.

*(a)* Justifier que le $\theta$ trouvé en question *(2)(b)* vérifie $\theta \approx \dfrac{T}{n}$ lorsque $n$ est grand.

*(b)* En remplaçant $\delta$ et $\theta$ par $\dfrac{T}{n}$ dans l'expression de $a_n$ et $b_n$ trouvée en question *(2)(c)*, calculer $\lim_{n\to\infty} a_n$ et $\lim_{n\to\infty} b_n$.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

* * *

*Exercice 1.* Soit $a \in \mathbf{R}^\star$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^{-1} & 1 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 1 \end{pmatrix}$.

*(1)* Calculer le rang et le noyau de $A$.

*(2)* Montrer que $A$ est diagonalisable et exhiber une base de vecteurs propres.

*(3)* Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

* * *

*Exercice 2.* On rappelle que la densité d'une loi normale centrée et de variance $\sigma^2$, notée $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, est

$$g_\sigma : t \in \mathbf{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} .$$

Pour $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$, on définit $Z = \max(X, Y)$.

*(1)* Justifier que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

*(2)* Calculer la fonction de répartition de $Z$ et montrer que cette variable aléatoire admet pour densité $f$ : $x \in \mathbf{R} \mapsto 2g_1(x)\Phi(x)$ où $\Phi$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

*(3)* Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g_1'(x) = -x g_1(x)$.

*(4)* En déduire que
$$\int_0^\infty x f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

*(5)* En effectuant des calculs similaires, on montre que $\displaystyle\int_0^\infty x f(-x) \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} \mathrm{d}t.$

Calculer l'espérance de $Z$.

*(6)* Montrer que $X^2$ et $Z^2$ ont la même loi. En déduire la variance de $Z$.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

* * *

*Exercice 1.* Déterminer l'ensemble des fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \qquad \int_x^y f(t)\mathrm{d}t = \frac{y-x}{2}\big(f(x)+f(y)\big).$$

* * *

*Exercice 2.* Une personne se rend chaque semaine dans un restaurant italien pour déguster des pâtes, et choisit entre trois recettes classiques : Arrabiata (notée $\mathbf{A}$), Bolognaise (notée $\mathbf{B}$) et Carbonara (notée $\mathbf{C}$). La première semaine, elle choisit les pâtes bolognaise. Après avoir dégusté des pâtes bolognaise, la semaine suivante la personne choisit les pâtes bolognaise avec probabilité $2/3$ et les pâtes carbonara avec probabilité $1/3$. Après avoir dégusté les pâtes carbonara, la semaine suivante la personne choisit les pâtes carbonara avec probabilité $1/3$ et les pâtes à l'arrabiata avec probabilité $2/3$. Enfin, après avoir dégusté les pâtes à l'arrabiata, la personne choisit ces même pâtes la semaine suivante.

On note $M_n$ la variable aléatoire à valeurs dans $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ qui donne le menu choisi la semaine $n$.

*(1)* Donner la valeur de $\mathbb{P}(M_{n+1} = \mathbf{I} \mid M_n = \mathbf{J})$ pour tous $\mathbf{I}, \mathbf{J} \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$.

Dans la suite de l'exercice, on note $p_n^{\mathbf{A}} = \mathbb{P}(M_n = \mathbf{A})$, $p_n^{\mathbf{B}} = \mathbb{P}(M_n = \mathbf{B})$ et $p_n^{\mathbf{C}} = \mathbb{P}(M_n = \mathbf{C})$.

*(2)* Exprimer $p_{n+1}^{\mathbf{A}}$, $p_{n+1}^{\mathbf{B}}$ et $p_{n+1}^{\mathbf{C}}$ en fonction de $p_n^{\mathbf{A}}, p_n^{\mathbf{B}}$ et $p_n^{\mathbf{C}}$.

*(3)* Exprimer $p_n^{\mathbf{B}}$ en fonction de $n$.

*(4)* Soit $X_n = \begin{pmatrix} p_n^{\mathbf{A}} \\ p_n^{\mathbf{B}} \\ p_n^{\mathbf{C}} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Montrer que $X_{n+1} = \frac{1}{3} Q X_n$ avec $Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

*(5)* Calculer les valeurs propres de la matrice $Q$.

*(6)* Montrer que

$$X_n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1} X_1$$

pour une matrice $P$ que l'on précisera.

*(7)* Calculer la limite de $\mathbb{P}(M_n = \mathbf{A})$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

* * *

*Exercice 1.* On s'intéresse à la vitesse de déplacement de personnes véhiculées, que l'on modélise de la façon suivante : la vitesse (exprimée en km/h) d'un individu isolé choisi au hasard est une variable aléatoire normale

— d'espérance $20$ et d'écart-type $5$ pour une personne se déplaçant à vélo ;

— d'espérance $25$ et d'écart-type $5$ pour une personne se déplaçant en trottinette.

La population est composée d'un cinquième de cyclistes et de quatre cinquièmes de trottinettistes. Soit $V$ la vitesse d'un individu isolé, choisi au hasard, dont on ignore le moyen de transport. On définit la fonction

$$F : x \in \mathbf{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u$$

dont on donne les quelques valeurs approchées suivantes :

| $x$ | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 | 2.2 | 2.4 | 2.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | 0.50 | 0.58 | 0.66 | 0.73 | 0.79 | 0.84 | 0.88 | 0.92 | 0.95 | 0.96 | 0.98 | 0.99 | 0.99 | 1.00 |

*(1)* Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F(x) + F(-x) = 1$.

*(2)* Exprimer la probabilité de l'évènement $[V < 15]$ à l'aide de la fonction $F$ et en donner une valeur approchée à l'aide de la table de valeurs.

*(3)* La vitesse d'un individu donné a été observée inférieure à 15 km/h. Quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse d'une une personne se déplaçant à vélo ?

*(4)* Déterminer l'expression explicite de la densité de $V$.

*(5)* Calculer l'espérance et l'écart-type de $V$.

* * *

*Exercice 2.* Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbf{R}^{3n}$ qui vérifie $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = 2n$.

*(1)* On considère l'endomorphisme $v$ restriction de $u$ à $\mathrm{Im}(u)$.

*(a)* Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) \subseteq \mathrm{Ker}(v) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$.

*(b)* Montrer que $\mathrm{rg}(u^2) = n$.

*(2)* Montrer qu'il existe une base de $\mathbf{R}^{3n}$ dans laquelle la matrice de $u$ s'écrit par blocs $n \times n$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

avec $0_n$ la matrice nulle de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ et $I_n$ la matrice identité de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$.

*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

* * *

*Exercice 1.*

*(1)* On considère une fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui admet un unique extremum local. Montrer que cet extremum est global.

*(2)* On considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2(1+y)^3 + y^2 \end{array}$$

*(a)* Calculer les dérivées partielles de $g$ à l'ordre 1.

*(b)* Montrer que $(0,0)$ est l'unique point critique de $g$.

*(c)* Montrer que $(0,0)$ est un extremum local de $g$ et en déterminer la nature.

*(d)* Montrer que $(0,0)$ n'est pas un extremum global de $g$.

*(e)* Comparer avec le résultat de la question *(1)*.

*(3)* La conclusion de la question *(1)* est-elle toujours vraie si $f$ n'est pas continue ?

* * *

*Exercice 2.* Un concert est organisé dans une salle contenant $N$ places. En tablant sur le fait que des personnes possédant des billets pourraient ne pas se présenter le soir du concert, et afin de maximiser son profit, l'organisateur vend un nombre $n$ de billets potentiellement supérieur à $N$. Chaque billet est vendu 100 euros. Si un spectateur ne se présente pas le soir du concert, il est remboursé à 50%. Si un spectactateur se présente le soir du concert et qu'il n'y a plus de places, il est remboursé à 200%. On note $p$ la probabilité qu'un spectateur se présente le jour du concert et on suppose que les comportements des spectateurs sont indépendants. On introduit une suite de variables aléatoires indépendantes $T_1, T_2 \ldots$ telles que $T_i = 1$ si le spectateur possédant le $i$-ème billet se présente le soir du concert et $T_i = 0$ sinon.

*(1)* Soit $X_n$ la variable aléatoire donnant le nombre de spectateurs se présentant le soir du concert. Exprimer $X_n$ en fonction des variables aléatoires $T_i$.

*(2)* Donner le loi de $X_n$, son espérance et sa variance.

*(3)* Soit $G_n$ le gain en centaines d'euros de l'organisateur qui a vendu $n$ billets. Exprimer $G_n$ en fonction de $n$, $X_n$ et de la variable aléatoire $Y_n$ donnant le nombre de visiteurs s'étant présenté et n'ayant pas obtenu de place.

On garde $N$ fixe et on s'autorise à faire varier $n$. Pour cela, on suppose que l'on passe de $n$ à $n+1$ en conservant les $n$ premier spectateurs et en ajoutant un $n+1$-ème, c'est-à-dire qu'on conserve les valeurs de $T_i$, $1 \leq n$ et on ajoute une variable aléatoire $T_{n+1}$.

*(4)* Montrer que $Y_{n+1} - Y_n = T_{n+1} \mathbb{1}_{(X_n \geq N)}$.

*(5)* En déduire la relation

$$\mathbb{E}[G_{n+1}] - \mathbb{E}[G_n] = 0.5 + 0.5p - 2p\mathbb{P}(X_n \geq N).$$

*(6)* Donner une condition suffisante sur le paramètre $p$ pour que la suite des gains moyens de l'organisateur soit croissante.