Concours MPI 2019 – Épreuve orale d'admission

Mathématiques – Ulm

Omid Amini, Igor Kortchemski

* * *

Sujets posés

* * *

Ce document comporte les sujets posés à l'oral « Maths Ulm » en 2019. Des recueils permettent déjà de rassembler de nombreux exercices par l'intermédiaire d'élèves admissibles, ainsi avons-nous souhaité rendre l'ensemble des exercices disponibles pour tout le monde. Nous espérons en effet que cela puisse permettre de forger une meilleure vision de ce qui se passe lors de cet oral, ainsi que d'aider l'ensemble des candidates et candidats, enseignantes et enseignants, pour le préparer.

L'épreuve dure 55 minutes, sans préparation. Le texte suivant, ou une légère variante, était systématiquement dit en début d'oral :

« Cet oral va durer 55 *minutes environ. Nous allons réfléchir à un ou plusieurs exercices de difficultés variables. À chaque fois l'exercice n'est qu'un prétexte à la discussion mathématique, et c'est elle qui compte. C'est normal s'il y a des points délicats, et arriver à la fin de l'exercice n'est pas l'objectif principal. »*

Les exercices principaux ne sont pas nécessairement conçus pour être entièrement résolus en un temps aussi limité. Il s'agit d'un point important à prendre en compte dans la préparation et dans la recherche d'un exercice original. Pour cette raison, nous publions également les éléments de discussion abordés lors de l'oral.

Davantage de précisions, en particulier en ce qui concerne l'évaluation, seront données dans le rapport de l'épreuve (publié en automne 2019).

Table des matières

1 Exercices posés

Chaque planche contient un exercice « principal », qui était souvent, mais pas systématiquement, interrompu 10 ou 15 minutes avant la fin de l'oral pour aborder une autre thématique (c'est pourquoi chaque planche contient souvent 2 exercices).

Chaque exercice a été donné au maximum deux fois à la suite. Les exercices ont été posés dans un ordre aléatoire établi avant le début des oraux.

* * *

Planche 1.
Exercice. On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de « piles » soit égal au double du nombre de « faces ». Quelle est la probabilité qu'on ne s'arrête jamais ?

* * *

Planche 2.
Exercice. Soit $n \geqslant 2$ un entier et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ des nombres réels différents. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) pour tout $1 \leqslant i \leqslant n+1$, $\det(A + t_i B) = 0$

(b) il existe V, W deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $A(V) \subset W$, $B(V) \subset W$ et $\dim W < \dim V$.

Deuxième exercice. On considère

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k$$

deux séries entières à coefficients strictement positifs de rayons de convergence respectifs r_f et r_g. On suppose que $0 < r_f < r_g$ et que la suite f_n/f_{n+1} converge. Montrer qu'il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $n \geqslant 1$ on a $g_n \leqslant a f_n e^{-bn}$.

* * *

Planche 3.
Exercice. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et notons

$$P(X) := \det(XI_n - A) = X^n + c_1 X^{n-1} + c_2 X^{n-2} + \cdots + c_{n-1} X + c_n$$

son polynôme caractéristique.

1) En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines de P, calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{P(X)}{X - \lambda_k}$ de deux manières différentes.

2) Montrer que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \begin{vmatrix} \mathrm{tr}(A) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{tr}(A^3) & \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathrm{tr}(A^{k-1}) & \mathrm{tr}(A^{k-2}) & \cdots & \cdots & \mathrm{tr}(A) & k-1 \\ \mathrm{tr}(A^k) & \mathrm{tr}(A^{k-1}) & \cdots & \cdots & \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) \end{vmatrix}.$$

Deuxième exercice. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(1) = 1$ et $f(x)f(y) \leqslant f(xy)$ pour tous $x, y \geqslant 0$.

* * *

Planche 4.
Exercice. Soient $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices telles que $A_j^2 = A_j$ pour $j = 1, \ldots, k$. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{k} (n - r(A_j)) \geqslant r(I_n - A_1 \cdots A_k)$$

où I_n est la matrice identité et $r(A)$ désigne le rang de A.

Deuxième exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} f(x)$ existe. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

L'exercice additionnel suivant a parfois été posé : montrer que le polynôme $n + (n-1)z + (n-2)z^2 + \cdots + z^{n-1}$ n'a pas de zéro dans le disque fermé $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$.

* * *

Planche 5.
Exercice. Soit G un groupe, $\delta > 0$ et $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction telle que

$$\forall x, y \in G, \qquad |f(xy) - f(x)f(y)| \leqslant \delta.$$

Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant C$ pour tout $x \in G$ ou $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in G$.

Trouver la plus petite valeur de C possible *(cette question a parfois été posée à l'oral une fois l'existence de C démontrée).*

Deuxième exercice. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions dérivables telles que $\|f_n'\|_\infty \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$. On suppose que f_n converge simplement vers g. Montrer que g est continue.

L'exercice additionnel suivant a parfois été posé : Peut-on trouver un sous-groupe strict de $(\mathbb{Q}, +)$ non monogène ?

* * *

Planche 6.
Exercice. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ non constante, telle que pour tout $n \geqslant 0$ et $x \in [0,1]$ on a $f^{(n)}(x) \geqslant 0$. Montrer que f ne peut s'annuler qu'au plus une fois. Montrer que f est développable en série entière autour de tout point de $]0,1[$ *(cette deuxième question a parfois été posée une fois la première question résolue).*

Deuxième exercice. Soit G un groupe. A-t-on G fini si et seulement si le nombre de sous-groupes de G est fini ?

* * *

Planche 7.

Exercice. Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients positifs tels que (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée f. Montrer que f est C^∞.

* * *

Planche 8.

Exercice. Soient $(X_i)_{i\geqslant 1}$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\forall a > 1, \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathbb{P}(X_1 \geqslant ax)}{\mathbb{P}(X_1 \geqslant x)} = 0.$

(2) il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels strictement positifs telle que $b_n \to \infty$ et

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i}{b_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \to 0.$$

Deuxième exercice. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ telle que la somme des entrées de A vaut r et telle que $\min\{k \geqslant 1 : A^k = \mathrm{Id}\} = 6$.

* * *

Planche 9.

Exercice. Pour une suite $(n_i)_{i\geqslant 1}$ d'entiers positifs, on considère la suite $(x_i)_{i\geqslant 1}$ définie par $x_1 = 2 + n_1$ et, pour $i \geqslant 2$,

$$x_i = 2 + \frac{n_1}{2 + \frac{n_2}{\cdots + \frac{n_i}{2}}}.$$

Dans le cas où la suite (x_i) est convergente, on note $[n_1, n_2, \dots]$ la limite de cette suite.

Soit A l'ensemble des nombres réels x qui sont de la forme $x = [n_1, n_2, \dots]$ pour une suite $(n_i)_{i\geqslant 1}$ avec $n_i \in \{5, 20\}$ pour tout i.

Déterminer $\min(A)$ et $\max(A)$. Déterminer A *(question posée une fois la question précédente résolue)*.

Deuxième exercice. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,i}a_{j,j} \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \lambda_i\lambda_j.$$

* * *

Planche 10.

Exercice. Déterminer le nombre de fois qu'il faut, en moyenne, lancer une pièce successivement et indépendamment au hasard pour observer une suite d'un nombre impair de « piles » suivi d'un « face ».

Deuxième exercice. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur. Soit $H : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme défini par $H(u) = \frac{1}{2}(u \circ p + p \circ u)$. Est-ce que H est diagonalisable ?

* * *

Planche 11.
Exercice. Montrer qu'il n'est pas possible de partitionner le plan $\mathbb{R}^2$ en une union disjointe de cercles de rayon strictement positif.

La question suivante a été parfois posée lorsque la première question a été traitée : par définition, une *triade* est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ homéomorphe à l'union de trois segments reliant le point $(0,0)$ aux points $(0,1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$. Montrer que $\mathbb{R}^2$ ne peut pas être partitionné en une union disjointe de triades.

Deuxième exercice. Pour $n \geqslant 3$, on note u_n la plus petite solution de l'équation $x = n\ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier u_n.

* * *

Planche 12.
Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont la restriction sur toute droite de $\mathbb{R}^n$ est monotone (c'est-à-dire, pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto f(tu+v)$ est monotone). Montrer qu'il existe une forme linéaire $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et une fonction monotone $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f = h \circ \phi$.

Deuxième exercice. Calculer

$$\lim_{x\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{x}{n}\big)^n\Big)^{\frac{1}{x}}.$$

* * *

Planche 13.
Exercice. Soit $A = \{0,1\}^2$ contentant les quatre points $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ de $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme ℓ_1 qu'on note $|\cdot|$.

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $f : A \to \mathbb{R}^n$ une application telle que

$$\forall x, y \in A, \qquad \big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant |x-y|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

Montrer qu'il existe deux points $a, b \in A$ qui vérifient

$$\big\|f(a) - f(b)\big\| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}|a-b|.$$

(2) *La question suivante n'a pas été posée :* on considère maintenant l'ensemble B constitué des points $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ muni de sa norme ℓ_1 qu'on note $|\cdot|$. Soit $n \geqslant 2$ un entier et $f : A \to \mathbb{R}^n$ une application telle que

$$\forall x, y \in A, \qquad \big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant |x-y|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

Montrer qu'il existe deux points $a, b \in B$ qui vérifient

$$\left\|f(a) - f(b)\right\| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}|a - b|.$$

Deuxième exercice. Trouver

$$\lim_{A \to \infty} \frac{1}{A} \int_1^A A^{\frac{1}{x}}\, dx.$$

* * *

Planche 14.

Exercice. Soient $(a_i)_{i \geqslant 1}$, $(b_i)_{i \geqslant 1}$ et $(c_i)_{i \geqslant 1}$ trois suites de nombres réels positifs tels que pour tout $n \geqslant 1$ on a $a_{n+1} \leqslant a_n - b_n + c_n$. On suppose que la série de terme général c_n converge. Montrer que la suite (a_i) converge.

Deuxième exercice. Soit $P(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$ avec α_i des nombres complexes avec $|\alpha_i| < 1$. On suppose que $|P(z)| \leqslant 1$ pour tout z de module 1. Trouver P.

* * *

Planche 15.

Exercice. Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de nombres entiers strictement positifs, strictement croissante. On pose $A(x) = \mathrm{Card}(\{k \geqslant 1 : a_k \leqslant x\})$. A-t-on

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{a_k} < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{A(x)}{x} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0?$$

Deuxième exercice. Soit $n \geqslant 1$ un entier, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice sans valeurs propres multiples et $p \geqslant 2$ un entier. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$XA - AX = X^p.$$

* * *

Planche 16.

Exercice. On pose $p_0 = 1$, $p_1 = 1$ et pour $n \geqslant 2$,

$$p_n = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-x_{n-1}} dx_n.$$

Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(\frac{\pi}{6}\right)^n.$$

Deuxième exercice. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On note $f_P : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par $f_P(Q) = \sum_{k=0}^{d} a_k Q^{(k)}$ où $Q^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de Q. Est-ce que f_P est un isomorphisme ? Est-ce que $P \mapsto f_P$ est un isomorphisme ?

* * *

Planche 17.
Exercice. Soit $f : [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x f(3x^2 - 2x^3) dx = 2 \int_0^1 x f(3x^2 - 2x^3) dx.$$

Deuxième exercice. Soit $n \geqslant 2$ un entier, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices. Montrer que

$$\det(A)\det(B) = \sum_{j=1}^{n} \det(A_j)\det(B_j)$$

où la matrice A_j est obtenue à partir de A en remplaçant la premième colonne de A par la j-ième colonne de B, et B_j est obtenue à partir de B en remplaçant la j-ième colonne de B par la première colonne de A.

* * *

Planche 18.
Exercice. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations d'un ensemble à n élèments. Pour une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $\mathrm{inv}(\sigma) = \mathrm{Card}(\{(i,j) : 1 \leqslant i < j \leqslant n \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\})$ le nombre d'inversions de σ.

(1) Montrer que $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x^{\mathrm{inv}(\sigma)} = (1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+\cdots+x^{n-1})$.
(2) On note $f(n)$ le nombre de permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telles que $\mathrm{inv}(\sigma)$ est divisible par $n+1$. Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers p avec $f(p-1) > \frac{(p-1)!}{p}$, et une infinité de nombres premiers p avec $f(p-1) < \frac{(p-1)!}{p}$.

Deuxième exercice. Soit $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction continue qui vérifie $\int_0^{+\infty} f^2(x)dx < \infty$. Trouver

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_0^x e^t f(t) dt}{e^x}.$$

* * *

Planche 19.
Exercice. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $f(A,B) = AB - BA$. Soit $L \in \mathcal{M}_{n(n-1)^2,n}(\mathbb{C})$ la matrice par blocs

$$L = \begin{pmatrix} f(A,B) \\ f(A,B^2) \\ \vdots \\ f(A^i, B^j) \\ \vdots \\ f(A^{n-1}, B^{n-1}) \end{pmatrix}$$

Montrer que A et B ont un vecteur propre commun si et seulement si $\mathrm{rg}(L) < n$.

Montrer que $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ : \ A \text{ et } {}^tA \text{ n'ont pas de vecteur propre commun}\}$ est un ouvert dense *(question posée une fois la question précédente résolue)*.

Deuxième exercice. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie $f(f'(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Y a-t-il une fonction $f :]0, \infty[\to]0, \infty[$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie la même équation pour $x > 0$?

L'exercice supplémentaire suivant a parfois été posé. Soit p_n le n-ième nombre premier. Est-il possible de factoriser le polynôme

$$A_n(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n$$

en un produit de deux polynômes à coefficients entiers de degré au moins 1 ?

* * *

Planche 20.

Exercice. Soit $s > 0$ un nombre réel. On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$, $u_2 = s$ et $u_{n+2} = \frac{u_n u_{n+1}}{n}$ pour $n \geqslant 0$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Deuxième exercice (posé sous différentes formes). Soit $n \geqslant 2$ un entier. Trouver le plus petit entier $N \geqslant 1$ tel que l'assertion suivante soit vraie : si $A, B, X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des matrices telles que A et B sont inversibles, et si $A^k X = A^k Y$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant N$, alors $X = Y$.

* * *

Planche 21.

Exercice. Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi, telles que

$$\mathbb{P}(X + Y \geqslant x) \underset{x\to\infty}{\sim} 2\mathbb{P}(X \geqslant x).$$

Montrer que

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) \underset{x\to\infty}{\sim} \mathbb{P}(X \geqslant x - 1).$$

Deuxième exercice. Pour un entier $n \geqslant 1$, on pose $f(n) = (-1)^{g(n)}$, où $g(n)$ est le nombre de diviseurs premiers de n comptés avec multiplicité (par exemple $g(5^2) = 2$). Calculer, pour $n \geqslant 1$,

$$\sum_{d|n} f(d).$$

* * *

Planche 22.

Exercice. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $p \in [0, 1]$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où les entrées sont indépendantes de même loi, donnée par $\mathbb{P}(A_{i,j} = 1) = p$ et $\mathbb{P}(A_{i,j} = 0) = 1 - p$. Calculer $\mathbb{E}[\det(A)]$ et $\mathbb{E}[\det(A)^2]$.

Deuxième exercice. Soit $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable tq $y'(t) = a(t) + b(t)$ pour tout $t \geqslant 0$. On suppose que a est uniformément, que b est continue de limite nulle en $+\infty$ et que y a une limite en $+\infty$. Montrer que $y'(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$.

* * *

Planche 23.
Exercice. Soit $(X_i)_{i\geqslant 0}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On fixe $\alpha \in]0,1[$. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & & t & \longmapsto & \mathbb{P}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k X_k \leqslant t\right) \end{array}$$

est continue.

* * *

Planche 24.
Exercice. Soit G un groupe et $M : G \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

– M est un quasi-morphisme si $\sup_{g,h\in G} |M(g)+M(h)-M(gh)| < \infty$;

– M est un quasi-caractère si $\forall g \in G, \forall n \in \mathbb{Z}$, $M(g^n) = nM(g)$.

Supposons que M soit un quasi-morphisme. Montrer qu'il existe une unique fonction $Q : G \to \mathbb{R}$ qui soit à la fois un quasi-morphisme et un quasi-caractère tel que

$$\sup_{g\in G} |M(g)-Q(g)| < \infty.$$

* * *

Planche 25.
Exercice. On définit récursivement les suites (P_i) et (Q_i) de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ comme suit. Les fonctions P_0 et Q_0 sont nulles et, pour $i \geqslant 1$:

$$P_i(x) := \left(1-x+\int_0^x Q_{i-1}(z)dz\right)^2, \qquad Q_i(x) := 1-\left(1-\int_0^x P_{i-1}(z)dz\right)^2.$$

Calculer

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \left(1-x+\int_0^x Q_k(z)dz\right)^3 dx.$$

Deuxième exercice. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) P n'a pas de racine réelle

(2) pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det P(A) = 0$ implique $P(A) = 0$.

* * *

Planche 26.

Exercice. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On dit que $f : E \to F$ est une isométrie si pour tout $x, y \in E$ on a $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. L'exercice était une discussion autour de la question suivante : est-ce que f est forcément linéaire ?

Les sous-questions suivantes ont été abordées : si $f(0) = 0$ et $E = F = \mathbb{R}$? Si $f(0) = 0$? Si $f(0) = 0$ et E, F sont euclidiens ? Si $f(0) = 0$, $E = F$ et f surjective ? Dans ce dernier cas : justifier qu'il suffit de montrer que f conserve les milieux. Ensuite, en posant $A(f) = \|f((x + y)/2) - (f(x) + f(y))/2\|$ construire une autre isométrie g telle que $f = f^{-1} \circ h \circ f$ avec h judicieusement choisie pour échanger x et y et calculer $A(g)$. Conclure.

* * *

Planche 27.

Exercice. Soient $a, r : [0, \infty[\to]0, \infty[$ deux applications continues. On suppose qu'il existe $\varepsilon, M > 0$ tel que $x - r(x) \geqslant \varepsilon$ pour tout $x \geqslant M$.

On considère une fonction continue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $[0, \infty[$, telle que

$$\forall x \geqslant 0, \qquad y'(x) = a(x)y(x - r(x)).$$

Montrer que

$$y(x) \exp\left(-\int_0^x a(t)dt\right)$$

converge vers une limite finie lorsque $x \to \infty$.

Deuxième exercice. Pour un groupe G, est-ce que G est fini si et seulement si tout sous-groupe de G est fini ? Est-ce que G est fini si et seulement si tout sous-groupe stricte de G est fini ?

* * *

Planche 28.

Exercice. Pour $\lambda \geqslant 0$ on pose

$$A_\lambda = \{k \in \mathbb{N}^* : \text{le nombre de 9 dans } k \leqslant \lambda \times \text{le nombre de chiffres dans } k\}$$

ainsi que

$$S_\lambda = \sum_{a \in A_\lambda} \frac{1}{a}.$$

Étudier la convergence de S_λ.

Deuxième exercice. On considère deux matrices $A \in \mathcal{M}_{2019}(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et telles que $A^{2019} = B^{2019} = I$. On suppose que $\mathrm{Tr}(AB) = 2019$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

* * *

Planche 29.
Exercice. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\det(A), \det(B) > 1$. On s'intéresse aux suites $v_0, v_1, v_2, \dots$ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ telles que $v_0 \neq 0$ et pour tout $i \geqslant 1$, on a $v_i = Av_{i-1}$ ou $v_i = Bv_{i-1}$.

Supposons que $AB = BA$. Montrer qu'il existe $v_0 \neq 0$ tel que toute telle suite commençant par v_0 est non-bornée.

Que se passe-t-il si on a $AB \neq BA$? *(cette deuxième question a parfois été posée une fois la question précédente résolue)*

Deuxième exercice. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe n réels deux à deux distincts $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)} = n.$$

* * *

Planche 30.
Exercice. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $P(x) > 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Montrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que tous les coefficients de $(1 + X)^n P(X)$ sont strictement positifs.

La deuxième question suivante n'a pas été posée : soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $P(x) > 0$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Montrer qu'on peut écrire $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i (1 - X)^i (1 + X)^{k-i}$ avec $a_i \geqslant 0$ pour un certain $k \geqslant 1$.

Deuxième exercice. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, périodiques de période 1. Trouver

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) g(nx) dx$$

* * *

Planche 31.
Exercice. Soit $m \geqslant 1$. Trouver tous les nombres complexes $a_1, \dots, a_m$ de module égal à 1 tels que

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^n$$

a une limite quand $n \to \infty$.

Deuxième exercice. On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne notée $\|\cdot\|$. Soient $e_1, \dots, e_n$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. On note $d_i = \|e_i\|$ pour $i = 1, \dots, n$. Soit m un entier naturel entre 1 et n. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) il existe un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$ de dimension m tel que les projections orthogonales de $e_1, \dots, e_n$ sur W ont la même norme.

(2) pour $i = 1, \dots, n$, on a l'inégalité

$$d_i^2 \left(\sum_{j=1}^{n} d_j^{-2} \right) \geqslant m.$$

* * *

Planche 32.
Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière en tout point. On suppose que la suite $f^{(n)}$ converge simplement vers g lorsque $n \to \infty$. Trouver g.

Deuxième exercice. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $B^2 = B$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(AB - BA) \leqslant \mathrm{rg}(AB + BA).$$

L'exercice supplémentaire suivant a parfois été posé : trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ soit limite uniforme sur $[-1, 0]$ de polynômes à coefficients positifs.

* * *

Planche 33.
Exercice. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et Id la permutation identité. On pose

$$g(n) = \max_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \min\{k \geqslant 1 : \sigma^k = \mathrm{Id}\}.$$

Montrer que pour tout $k \geqslant 1$

$$\frac{g(n)}{n^k} \to +\infty$$

lorsque $n \to \infty$.

Deuxième exercice. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions périodiques. On suppose que

$$\lim_{x \to \infty} (f_1(x) + \cdots + f_n(x)) = 0.$$

Montrer que $f_1 + \cdots + f_n = 0$.

* * *

Planche 34.
Exercice. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et Id la permutation identité. On pose

$$g(n) = \max_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \min\{k \geqslant 1 : \sigma^k = \mathrm{Id}\}.$$

Trouver les entiers $n \geqslant 1$ tels que $g(n)$ soit impair.

Deuxième exercice. Soit $f :]1/4, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction telle que $x^{f(x)} = f(x)$ pour tout $1/4 < x < 1$. Montrer que f est uniformément continue.

* * *

Planche 35.

Exercice. Soient $(X_i)_{i\geqslant 1}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pour $\varepsilon > 0$, calculer

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon \,|\, S_{2n} = 0\right).$$

Deuxième exercice. Trouver toutes les valeurs de $c \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) > f(x) + c \quad \text{et} \quad f''(x) > f'(x) + c.$$

* * *

Planche 36.

Exercice. On considère la suite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $Y_0 = 0$, $Y_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, $Y_n = |Y_{n-1} \pm Y_{n-2}|$, où les $\pm$ sont choisis aléatoirement de manière indépendante et uniforme. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\forall n \geqslant 1, Y_n \neq 0\right) \in]0, 1[.$$

La deuxième question suivante n'a pas été posée : que se passe-t-il si on considère la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $X_0 = 0$, $X_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, $X_n = X_{n-1} \pm X_{n-2}$?

Deuxième exercice. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Trouver toutes les fonctions $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telles que $f(XY) \leqslant \min(f(X), f(Y))$ pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Éléments de discussion ou questions additionnelles

Nous donnons ici l'union des éléments de discussion qui ont pu avoir lieu. En particulier, sur chaque exercice, les candidates et candidats ont eu une partie des éléments ci-dessous (la discussion s'engage à partir des pistes explorées par les candidates et candidats).

Planche 1 (Éléments de discussion)**.** Que se passe-t-il si maintenant on s'arrête le nombre de « piles » soit égal au nombre de « faces » ? Essayez une représentation graphique (le but était d'amener le candidat ou la candidate à considérer par exemple $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec (X_i) i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$). Si on part de 2 et qu'on repasse par 0, par où est-on forcément passé ? Considérer pour $k \geqslant 1$ la quantité $\mathbb{P}(\text{partant de } k \text{ on touche } 0)$. Que dit la loi des grands nombres ? Quelle est l'idée de la démonstration ?

Planche 2 (Éléments de discussion)**.** Pour le sens direct, comment pourrait-on construire V et W ? Pourquoi $\det(A) = 0$ ssi A n'est pas inversible ? Pourquoi $\det(AB) = \det(A)\det(B)$? L'énoncé de l'exercice reste-t-il vrai si on considère n réels et non $n+1$? Que se passe-t-il si A et B commutent ?

Planche 3 (Éléments de discussion)**.** Comment trouver les coefficients de $P(X)/(X - \lambda_k)$? Pourquoi $\mathrm{Tr}(A)$ est la somme des valeurs propres de A ? Quel est le lien entre polynôme minimal et polynôme caractéristique ? Est-ce que tous les coefficients (c_i) peuvent être positifs ? Décrire la règle de Cramer.

Plutôt que de considérer x^{2^n}, considérez $x^{1/2^n}$.

Planche 4 (Éléments de discussion)**.** Commencer par le cas où $k = 2$. Que se passe-t-il si les matrices commutent deux à deux ? Quels sont les cas d'égalité dans ce cas-là ? Est-ce que $A_1 \cdots A_k$ peut ne pas être un projecteur ? Quelle est l'idée de la preuve du résultat de diagonalisation simultanée (question posée lorsqu'un candidat ou une candidate l'a utilisé) ? L'inégalité reste-t-elle vraie si les matrices ne sont plus des matrices de projection ?

Planche 5 (Éléments de discussion)**.** Est-ce possible de trouver une telle fonction f qui ne vérifie pas $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous x, y ; si G est fini, infini ? Partez de $f(xyx_n)$.

Donnez un exemple de groupe infini, de groupe infini non commutatif. Soit P un polynôme à valeurs entières sur $\mathbb{Z}$; est-ce que les coefficients de p sont forcément dans $\mathbb{Z}$? Un groupe G dont tous les éléments sont d'ordre fini est-il forcément fini ?

Planche 6 (Éléments de discussion)**.** Donner un exemple de fonction satisfaisant aux conditions de l'exercice. Que vaut $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ sur $[0, x]$? Comment faire apparaître des termes de type $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n$? Quel est l'énoncé du théorème de Lagrange ? Quelles formules de Taylor connaissez-vous ? Donnez une idée de preuve de la formule de Taylor avec reste intégral. Si une fonction est développable en série entière autour de tout point de $\mathbb{R}$, est-ce que ces développements en série entière ont forcément un rayon de convergence infini ?

Planche 7 (Éléments de discussion)**.** Est-ce qu'on peut trouver un exemple où f n'est pas un polynôme ? Si $P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} a_{n,k}x^k$, est-ce que $a_{n,0}$ converge ? Que dire de la suite $(a_{n,1})$? Pourquoi la convergence normale d'une suite de fonctions implique la convergence uniforme ? Calculez la dérivée de $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Donner un exemple d'une suite (f_n) qui converge simplement vers une fonction f non-continue. Qu'est-ce qui se passe si on suppose que f est un polynôme ? Donnez un exemple de groupe infini, de groupe infini non commutatif.

Planche 8 (Éléments de discussion)**.** Y a-t-il un résultat du cours avec une convergence similaire à (2) ? Donnez son énoncé et l'idée de démonstration. Donnez un exemple de variable aléatoire avec un moment d'ordre 1 fini mais avec un moment d'ordre 2 infini. Peut-on trouver une variable aléatoire avec un moment d'ordre 2 fini mais un moment d'ordre 1 infini ? Reformulez la condition (2) de l'énoncé. Donner des exemples des variables aléatoires qui vérifient ces conditions. Que vaut b_n dans ce cas ? Supposons que nous avons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} n \ln(1-a_n) = -\infty$. Que dire des termes de cette suite ?

Quelles informations un polynôme annulateur donne-t-il ?

Planche 9 (Éléments de discussion)**.** Comment faire pour construire le plus petit élément de A ? Est-ce que $[20, 5, 20, \ldots]$ est bien défini ? L'écriture $[n_1, n_2, \ldots]$ est-elle unique ?

Planche 10 (Éléments de discussion)**.** Est-ce qu'on s'arrête forcément ? Si X désigne ce nombre de fois, essayez de trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{P}(X = n)$. Donnez les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres de H.

Planche 11 (Éléments de discussion)**.** Que se passe-t-il si on on considère des disques ouverts au lieu de cercles ? Des disques fermés ? Donnez un exemple de suite de Cauchy non convergente (posée dans le cas où cette notion a été évoquée par un candidat ou une candidate). Quelles propriétés des compacts connaissez-vous ?

Montrer qu'il existe au plus un nombre dénombrable de triades disjointes dans $\mathbb{R}^2$.

Planche 12 (Éléments de discussion)**.** Quelles sont les propriétés d'une fonction f monotones sur les droites ? Commencer par le cas $n = 2$. Est-ce que f peut être monotone stricte sur toutes les droites ? Montrer qu'il existe des droites sur lesquelles f est constante. Justifiez que sur n'importe quel cercle on peut trouver deux points diamétralement opposés sur lesquels f prend la même valeur.

Donner un équivalent de la suite n^n.

Planche 13 (Éléments de discussion)**.** Peut-on avoir $\|f(x) - f(y)\| = |x - y|$ pour tout x, y ? Faites un dessin. Commencer par le cas $n = 2$. Que donne l'identité du parallégramme pour un quadrilatère général ? (Question posée si cette identitié était mentionnée par un ou une candidate.) Que dire s'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire ? Donner un exemple de deux normes équivalentes sur un espace vectoriel. Donner un exemple de deux normes non-équivalentes. Pourquoi un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est forcément fermé ?

Planche 14 (Éléments de discussion)**.** Réciproquement, est-ce que si pour tout $n \geqslant 1$ on a $a_{n+1} \leqslant a_n - b_n + c_n$ et la suite (a_i) converge, alors la série de terme général c_n converge ?

Pour un degré $2, 3$ que se passe-t-il géométriquement ? Pour $P(z) = z^2 + az + b$, montrer que $\sup_{|z|=1} |P(z)| \geqslant 1 + |b|$. On peut supposer a et b réels dans un premier temps. Si dans une population, la taille moyenne est $2m$, que peut-on dire ?

Planche 15 (Éléments de discussion)**.** Si $n \sim \frac{a_n}{\ln(a_n)}$, trouvez un équivalent de a_n. Est-ce que $u_n \sim v_n$ implique $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$? Justifiez le fait que si une matrice est annulée par un polynôme scindé à racines simples, alors elle est diagonalisable.

Planche 16 (Éléments de discussion)**.** Y a-t-il une structure récursive dans (p_n) ? Comment obtenir une relation de récurrence ? Que cherche-t-on à calculer dans l'exercice ? Justifiez la dérivation terme à terme d'une série de fonctions dont la série et la série des dérivées convergent uniformément.

Planche 17 (Éléments de discussion)**.** Esquissez le graphe de $3x^2 - 2x^3$ sur $[-1/2, 3/2]$. Justifiez que $(1/2, 1/2)$ est un centre de symétrie. Appliquez la formule du changement de variable sur $[-1/2, 0]$. Donnez l'énoncé général (dans $\mathbb{R}$) de la formule du changement de variable ainsi que sa preuve.

Le résultat est-il vrai lorsque la matrice B est égale à la matrice identité ?

Planche 18 (Éléments de discussion)**.** Rappeler la définition de la signature. Pourquoi est-ce un morphisme de groupes ? Combien y a-t-il de transpositions, de 3-cycles dans $\mathcal{S}_n$? Combien y a-t-il de permutations dont le nombre d'inversions est pair ? Comment extraire les coefficients d'indices divisibles par 3 d'un polynôme ?

Planche 19 (Éléments de discussion)**.** Considérez d'abord le cas où le rang de L est nul. Comment trouver un espace stabilisé par A et B sur lequel A et B commutent ?

Planche 20 (Éléments de discussion)**.** Calculez les premiers termes. Qualitativement, que se passe-t-il si s est très petit ou s très grand ?

Est-ce que a_n équivalent à b_n implique $\ln(a_n)$ équivalent à $\ln(b_n)$? Quand est-ce que c'est le cas ? Pouvez-vous donner un contre-exemple dans le cas général ?

Planche 21 (Éléments de discussion)**.** Vérifiez qu'il suffit de démontrer le résultat pour x entier. Comparez $\mathbb{P}(X \geqslant n)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant n - 1)$. Si $1 \leqslant Y \leqslant n - 1$, que X doit-il vérifier pour qu'on soit sûr que $X + Y \geqslant n$? Comment la fonction génératrice des moments permet-elle de déterminer l'espérence ?

Planche 22 (Éléments de discussion)**.** Pour le calcul de $\mathbb{E}(\det(A)^2)$ intervenant deux sommes sur les permutations, commencez par le calcul avec l'une des permutations égales à l'identité. Comment calculer $\sum_{\sigma \in D_k} \varepsilon(\sigma)$ où D_k désigne l'ensemble des permutations de longueur k sans point fixe ?

Planche 23 (Éléments de discussion)**.** Est-ce que F est continue en $1/(1-\alpha)$? Que se passe-t-il en un point de discontinuité de F ? Peut-on trouver une variable aléatoire Y telle que $\mathbb{P}(Y = t_0) = 0.49$, $\mathbb{P}(Y = t_1) = 0.499$ et $\mathbb{P}(Y = t_2) = 0.4999$? Que donne la formule des probabilités totales avec X_0 ? Est-ce que tout nombre dans l'intervalle $[0, \frac{1}{1-\alpha}]$ s'écrit de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \alpha^k$ pour $u_k \in \{0, 1\}$? Une telle écriture est-elle forcément unique ?

Planche 24 (Éléments de discussion)**.** Donner des exemples de quasi-morphismes et de quasi-caractères. Trouvez un lien entre $Q(g)$ et $Q(g^{-1})$. Est-ce qu'on peut deviner la valeur de $Q(g)$? Si $M(g^n)/n$ a deux valeurs d'adhérences avec deux extractions ϕ, ψ, que se passe-t-il si $\phi(n)$ est un multiple de $\psi(n)$?

Planche 25 (Éléments de discussion)**.** Que se passe-t-il en certaines valeurs particulières. Calculez $P_{i+1}(x) - P_i(x)$. Écrivez le théorème de convergence dominée. Admettons d'abord que la convergence soit uniforme. Quel est l'énoncé du théorème de point fixe pour un morphisme contractant (question posée si ce théorème était évoqué par un candidat ou une candidate).

Planche 26 (Éléments de discussion)**.** Justifiez que $f(x) - f(y)$ et $f((x+y)/2) - (f(x) + f(y))/2$ ne sont pas colinéaires. Pour montrer que f est linéaire, pourquoi suffit-il de montrer que $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$?

Planche 27 (Éléments de discussion)**.** Donner un exemple de fonction y avec $a(x) = x$ et $r(x) = 1$. Peut-on montrer la convergence en mettant des hypothèses additionnelles sur y ? Que se passe-t-il si y est croissante ? Que se passe-t-il si $y_{|\mathbb{R}^-} \equiv 0$? Et si on ne connaît que la fonction sur $\mathbb{R}_-$? Est-ce que vous pouvez donner une description des solutions ? Énoncez le théorème de Cauchy linéaire.

Planche 28 (Éléments de discussion)**.** Que se passe-t-il pour $\lambda = 0$? Quel est le nombre déléments de A_0 à précisément k chiffres ? Avez-vous une idée de ce que pourrait être le λ critique ? Pour traiter le cas $\lambda = 1/2$, restreignez-vous au cas où le nombre de chiffres est un multiple de 10. Si X_n est un nombre obtenu en choisissant uniforme au hasard n chiffres entre 0 et 9, que peut-on dire ?

Commencez par le cas où A et B sont diagonales.

Planche 29 (Éléments de discussion)**.** Peut-on se ramener à des formes plus simples de A et de B ?

Planche 30 (Éléments de discussion)**.** Regardez des polynômes de petit degré. Caractérisez l'ensemble des polynômes de degré 2 tels que $P(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Planche 31 (Éléments de discussion)**.** Quelles sont les valeurs de θ pour lesquelles $|\cos(n\theta)|$ converge ?

Regardez ce qui se passe matriciellement.

Planche 32 (Éléments de discussion)**.** En admettant qu'on puisse intervertir les limites, et que les convergences ont lieu dans les sens que vous voulez, que peut-on dire de g ? Quand peut-on intervertir limite et dérivation ? Si $f^n(z) = g(z) + \varepsilon_n(z)$, comment ne faire intervenir ε_n que pour des grandes valeurs de n ?

Est-ce que le rang est continu ? Que dire de B ?

Planche 33 (Éléments de discussion)**.** Calculez $g(n)$ pour des petites valeurs de n. Comment trouver l'ordre d'une permutation ? Essayez d'écrire n comme la somme de deux entiers et de plusieurs 1 pour avoir un PPCM pas trop petit.

Donnez un exemple de deux fonctions périodiques dont la somme n'est pas périodique.

Planche 34 (Éléments de discussion)**.** Calculez $g(n)$ pour des petites valeurs de n. Si G est un groupe fini commutatif, que dire de l'ordre de ab ? Peut-on avoir $g(n) = 3^2 \times 5$? Est-ce que $g(n) = p^\alpha$ est possible ? Si $g(n)$ est impair, montrez que si p divise $g(n)$ alors p^2 ne divise par $g(n)$. Peut-on voir f comme l'inverse d'une fonction ?

Planche 35 (Éléments de discussion)**.** Par quoi majorer un coefficient binomial ?

Que se passe-t-il pour $c = 0$? Pour $c > 0$, est-ce que f peut être positive ? Que se passe-t-il au voisinage de $-\infty$?

Planche 36 (Éléments de discussion)**.** Calculez les lois de Y_i pour des petites valeurs de i. Pour calculer la loi de Y_6, de quoi avez-vous besoin ? En considérant $U_n = (Y_n, Y_{n+1})$, si vous partez de $(0, 1)$, regardez ce que vous pouvez faire.

Si $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$ avec $(Z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ indépendantes de même loi donnée par $\mathbb{P}(Z_1 = 2) = \mathbb{P}(Z_1 = -1) = 1/2$, montrez que $\mathbb{P}(S_n \leqslant 0) \to 0$.

Prenez $Y = I_n$. Donnez des exemples de fonctions qui conviennent.