Banque Lettres et Sciences Économiques et Sociales

ENS Paris – Épreuve orale de mathématiques 2021

Nina Aguillon, Jérémie Bettinelli

Durée de l'épreuve. 90 min de préparation et 30 min de passage (dont au plus 15 min de présentation sans intervention du jury).

Modalités. Deux exercices indépendants à préparer. **calculatrice interdite**

1 Commentaires généraux

Distribution des notes. Cette année, 62 candidat·es ont passé l'épreuve orale de mathématiques. Le jury a senti une baisse de préparation par rapport aux année passées, très probablement liée à la situation sanitaire. Toutefois, le niveau général des candidat·es est comparable à celui des années passées. La moyenne des notes s'établit à 11.7 avec un écart-type de 4.7.

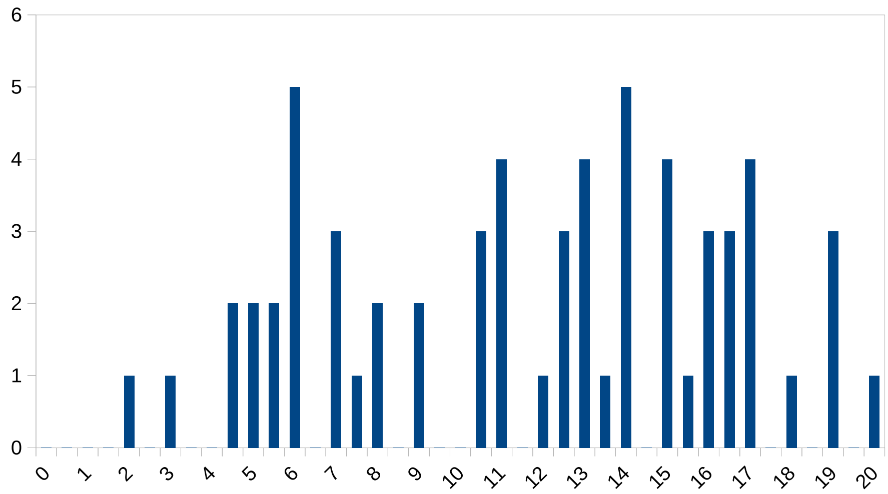

FIGURE 1 – Histogrammes des notes obtenues à l'oral.

Déroulement de l'épreuve. Les candidat·es disposent tout d'abord de 90 min pour préparer leur passage à l'oral. Chaque planche est constituée de deux exercices indépendants. Chaque couplage est construit dans un triple objectif d'équilibre : couverture thématique (analyse, algèbre, probabilités), difficulté (deux exercices moyens, ou bien un exercice facile ou court couplé avec un plus difficile ou long) et originalité. Comme les années précédentes, nous avons prêté une attention toute particulière à la progressivité des planches, qui contenaient toutes des questions faciles pour mettre en confiance les candidat·es, mais également des questions plus difficiles permettant aux meilleur·es candidat·es de s'exprimer. Mentionnons que, dans un souci d'équité, toutes les planches sont prêtes avant le début des épreuves, et sont distribuées selon un ordre aléatoire défini avant le début des oraux.

Le passage à l'oral, qui dure 30 min, se compose des deux phases suivantes.

— La *présentation* (15 min maximum) : le·a candidat·e présente à sa guise et sans intervention du jury les éléments résolus lors de sa préparation.

— La *reprise* (reste du temps) : le jury mène la discussion. Il revient d'abord sur ce qui a été écrit **et** dit lors de la présentation afin de rectifier certaines erreurs ou corriger des maladresses. Ensuite, afin de tester les réactions et le recul, les examinateurs abordent les questions qui n'ont pas été réussies en donnant des indications. Dans le cas de très bons oraux, le jury n'hésite pas à poser des questions supplémentaires d'ouverture ne figurant pas dans la planche.

Nous insistons sur le fait que la prestation orale est notée sur sa totalité. Ainsi, une présentation courte n'est pas pénalisée en soi, et elle laisse simplement plus de temps au candidat ou à la candidate pour améliorer sa note lors de la reprise. Celle-ci est très importante pour la détermination de la note : un·e candidat·e ayant bloqué sur des questions pourra obtenir une très bonne note s'il ou elle réussit à bien exploiter les indications données par le jury et montre une bonne maitrise des notions essentielles du programme sans dire ou écrire des assertions fausses.

Dans l'ensemble, le déroulement de l'oral est très satisfaisant et permet au jury de bien évaluer les candidat·es.

Évolution par rapport aux années passées. En raison de la crise sanitaire, les oraux ont été annulés en 2020 (la notation de l'épreuve d'écrit avait été modifiée en conséquence). En 2019 et avant, la préparation durait 60 min et la présentation 10 min maximum. Depuis cette année, le temps de préparation dure **90 min** et la présentation **15 min** maximum. Cela avait été annoncé dans le rapport de 2019 et a été rappelé de façon systématique par écrit sur chaque planche et oralement au moment de la remise des planches aux candidat·es. Il est conseillé de **viser une durée comprise entre 10 min et 15 min** pour cette phase. Cette année, la plupart des présentations sont tombées dans cet intervalle de temps ; nous n'avons interrompu que quelques candidat·es arrivé·es au terme des 15 min. Le temps moyen observé a été de 12.5 min.

Notation. La note finale a été obtenue en prenant en compte les critères suivants : connaissance du cours, autonomie sur les questions de base et les questions difficiles, absence d'erreurs grossières, réactivité et capacité à se corriger lors de la reprise, intuition et rédaction mathématique, et avancement global à l'issue de la reprise.

Présence du public. En raison de la crise sanitaire, la présence du public n'a pas été autorisée cette année.

2 Conseils aux candidat·es

Les candidat·es sont bien préparé·es et, pour la plupart, à l'écoute du jury, réactif·ves et agréables à interroger. Certaines prestations pourraient être améliorées en prenant en compte les points suivants.

2.1 Présentation

Gestion du tableau. Lors de la présentation, le jury n'intervient que pour stopper un·e candidat·e arrivant au terme des 15 min imparties. Les candidat·es doivent gérer seul·es leur tableau, cela fait partie de la présentation de leurs résultats. Il est conseillé d'effacer le moins possible afin que le jury puisse plus facilement revenir sur certains points. Il n'est pas utile de demander l'accord du jury pour effacer une partie du tableau pendant cette phase, ce dernier répondra systématiquement qu'il laisse le·a candidat·e gérer seul·e.

Lors de la présentation, nous rappelons qu'il n'est pas nécessaire de tout écrire (notamment les détails de calculs) mais qu'il est important de noter les points clés, surtout lorsqu'il peut y avoir ambiguïté (par exemple sur une inégalité large ou stricte). Il n'est pas non plus nécessaire de recopier une donnée de l'énoncé. Séparer le tableau en 3 ou 4 et écrire normalement suffit généralement à bien gérer son tableau.

Pistes infructueuses. Nous encourageons les candidat·es à mentionner les pistes concrètes tentées lorsqu'une question n'a pas pu être résolue. Il est tout à fait possible d'exposer un raisonnement incomplet ou sur lequel on a des doutes, en disant très clairement quels sont les points laissés en suspens ou dont on n'est pas certain·es. Beaucoup de candidat·es choisissent de ne pas présenter une question faute de certitude, et la résolvent à la reprise sans indications.

Synthèse. Il ne faut pas chercher à utiliser coute que coute les 15 min maximales allouées à la présentation. Il est toujours judicieux de présenter de manière concise les étapes importantes du raisonnement. En cas de doute, le jury reviendra sur les détails lors de la reprise. Certain·es candidat·es ont eu du mal à trouver le bon équilibre, détaillant parfois excessivement des calculs simples ou passant sous silence des points clés. Si un·e candidat·e a beaucoup de choses à présenter, il·elle doit faire un choix dans les détails donnés.

Exemples types. Voici quelques exemples de présentations tout à fait satisfaisantes de certaines parties calculatoires.

— **Calculer** $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^2$**.**

« J'ai effectué le produit matriciel, et ai reconnu les formules de trigonométrie de doublement de l'angle. On obtient la même matrice où θ est remplacé par 2θ. »

— **Vérifier que, pour tout** (x_1, y_1)**,** (x_2, y_2)**,** $(a, b) \in \mathbf{R}^2$**,**

$$\|(x_1, y_1)-(x_2, y_2)\|^2 = 2\|(a, b)-(x_1, y_1)\|^2+2\|(a, b)-(x_2, y_2)\|^2-4\left\|(a, b)-\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)\right\|^2.$$

« Le calcul est assez long, on remarque que tout les termes impliquant a ou b se compensent. Il ne reste que la quantité suivante <*à écrire au tableau*>. L'identité remarquable donne le résultat. »

— **Calculer les dérivées partielles de**

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \begin{cases} (x+y)\ln(x^2+y^2) & \textbf{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textbf{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

« J'ai trouvé $\partial_1 f(x,y) = \ln(x^2+y^2) + 2x\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ <*à écrire au tableau*> et une formule similaire pour $\partial_2 f$ où le terme x est remplacé par y <*en pointant le x en question sur le tableau*>. »

2.2 Reprise et interaction avec le jury

Gestion du tableau. Lors de la reprise, nous encourageons les candidat·es à écrire au tableau, surtout les indications du jury. Les formules énoncées oralement peuvent être ambivalentes et la simple écriture au tableau permet par exemple au jury de rectifier une erreur d'interprétation. Toute prise d'initiative consistant à tenter des choses en les écrivant au tableau est **fortement valorisée**. À cette étape, il est important d'obtenir l'accord du jury avant d'effacer une partie du tableau.

Notes personnelles. Lors de la reprise, nous conseillons aux candidat·es de laisser leurs notes de coté et de ne s'y référer que ponctuellement pour se rappeler d'un résultat non présenté. Nous les encourageons plutôt à se concentrer sur l'échange en cours avec le jury, qui pourra rappeler tous les éléments utiles qui auraient été effacés.

Attitude du jury. Le jury, toujours bienveillant, cherche à évaluer le plus justement les candidat·es et n'essaiera jamais de les « piéger ». En général, lorsque un·e candidat·e est laissé sans indication en silence, c'est que le jury estime qu'il·elle est sur une bonne piste. Il est donc inutile, voire contre-productif, de s'arrêter, se retourner et chercher l'acquiescement du jury à chaque étape du raisonnement.

Dans la mesure du possible, le jury reste neutre dans son attitude et ne montre ni enthousiasme ni mécontentement. Ainsi, nous encourageons les candidat·es à se méfier de l'impression qu'il·elles peuvent avoir de leur prestation et à ne pas chercher à interpréter les réactions du jury.

Attitude des candidat·es. Les épreuves orales sont stressantes et le déroulement de l'oral, imprévisible par nature, peut déstabiliser les candidat·es. Nous invitons les candidat·es à traiter le jury avec respect et tenir compte de ses indications. Le jury peut avoir été dépassé par le rythme de certaines présentations et demander de répéter un point qui a été mentionné à l'oral. Cela ne signifie pas forcément que le point a mal été traité et il convient de le réexpliquer. A contrario, le jury demande fréquemment des précisions sur des points qui ont été traités de façon incomplète ou incorrecte. Dans ce cas, nous invitons les candidat·es à réagir avec humilité et à se corriger.

Nous avons malheureusement vu certain·es candidat·es s'enferrer dans leurs erreurs sans tenir compte des multiples indications du jury visant à les remettre dans le droit chemin. Nous avons également vu des attitudes très nonchalantes frôlant le mépris. Il va sans dire que ce type d'attitude, assez rare, est à proscrire. Plus précisément, nous déconseillons les comportements suivants, particulièrement les deux premiers.

— Excès de confiance en soi. Ici, les candidat·es agissent comme s'ils ne comprenaient pas les questions. Ils répètent mot pour mot leurs arguments, même quand le jury y revient avec insistance, et refusent de remettre en cause leur raisonnement. Ces candidat·es perdent énormément de temps et cette absence de remise en question est pénalisée.

— Absence d'écoute du jury. Le jury propose une piste ou admet un résultat et le·a candidat·e passe outre leur commentaire et continue longuement sur leur piste. Nous comprenons la frustration que l'on peut ressentir à laisser de côté une piste. Cependant, là encore, le·a candidat·e perd du temps en poursuivant son raisonnement (souvent faux dans ce cas de figure).

— Refus d'écrire. L'objet de la reprise est souvent de préciser les raisonnements. On demande donc d'énoncer les hypothèses des théorèmes, de traiter des cas simples, ou de construire des contre-exemples. Beaucoup de candidat·es ont de bonnes idées mais rechignent à écrire précisément les choses au tableau. Lorsque le jury le demande, une rédaction précise est attendue.

— Utilisation de notions hors programme. Nous invitons les candidat·es à se méfier des « demi-souvenirs » qui peuvent amener à énoncer des énormités. Tous les exercices peuvent se traiter dans le cadre strict du programme officiel. Nous décourageons l'emploi de notions et même de vocabulaire hors programme. Nous observons que les candidat·es maitrisent généralement mal ce type d'arguments et nous proposons souvent d'autres pistes, bien plus simples, pour résoudre la question : la personne ne doit pas être surprise et doit accepter de délaisser ses connaissances hors programme pour se tourner vers une autre méthode.

3 Erreurs les plus fréquentes

Nous signalons ici quelques erreurs courantes.

— Le théorème de la bijection est rarement bien énoncé, les candidat·es omettent souvent la *stricte* monotonie ou la continuité.

— Certains exercices demandent de procéder par analyse et synthèse. Dans ce cas, il ne faut pas oublier la synthèse.

— L'utilisation de la continuité est souvent mal maitrisée. Les passages à la limite, dans les fonctions ou les inégalités, sont rarement justifiés. La définition de la continuité n'est pas toujours acquise.

— Dans le cadre d'un raisonnement par récurrence, il faut faire très attention aux quantificateurs à l'intérieur de l'hypothèse de récurrence. Cette année encore, nous avons vu comme hypothèse de récurrence « il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que [...] ».

— En algèbre linéaire, on a vu des confusions sur les tailles des objets et les dimensions des espaces de matrices.

— Le fait qu'une matrice ayant une unique valeur propre est diagonalisable si et seulement si elle représente une homothétie est mal maitrisé. Le mot clé « homothétie » est souvent invoqué mais les candidat·es peinent à donner plus de détails.

— Faire des dessins pose souvent problème. On le demande presque toujours quand l'exercice s'y prête.

— Lorsqu'on demande une étude de fonction, une représentation graphique est attendue. Quelques valeurs stratégiques avec tangentes suffisent généralement à obtenir un très bon graphe.

— Il est rarement pertinent de montrer la dérivabilité d'une fonction pour obtenir sa continuité.

— Les notations du type $P(X = a \cap Y = b)$ sont quasi-systématiquement utilisées au lieu de $P\big(\{X = a\} \cap \{Y = b\}\big)$.

4 Commentaires planche par planche

Planche 1 du 15/6/21. Le premier exercice étudiait un endomorphisme de polynomes et visait à le diagonaliser. La justification de la dérivabilité a rarement été convaincante et la dernière question n'a été traitée spontanément que par un·e candidat·e. Le fait que f_λ n'est en général pas un polynome n'a pas souvent été bien compris.

Le deuxième exercice présentait un modèle de répétition d'expérience de Bernoulli indépendantes mais pas équidistribuées. L'exercice a été plutôt bien résolu dans l'ensemble, souvent avec un peu d'aide sur la dernière ou les deux dernières questions. Un·e candidat·e a traité l'intégralité de la planche dès la présentation.

Planche 1 du 17/6/21. Le premier exercice s'intéressait à l'indépendance entre une variable aléatoire X et son carré $Y = X^2$. Cet exercice sans grande difficulté a été bien réussi dans l'ensemble. Le fait que, dans le cas considéré, $X^3 = X$ a déstabilisé les candidat·es.

Le second exercice étudiait la distance minimale entre un ensemble A et un point, principalement en dimension 2. Les premières questions portaient sur des cas particuliers puis on s'intéressait à l'unicité du minimiseur. La définition d'un sous-espace vectoriel a posé problème à plusieurs candidat·es. L'exemple de la question 3 a donné lieu à des manipulations hasardeuses de vecteurs sur les graphiques. La norme est plutôt bien manipulée et on a noté une bonne intuition dans la question 4d. La question 4c, calculatoire, était difficile à restituer ; nous sommes satisfaits de l'approche des candidat·es.

Planche 2 du 17/6/21. Le premier exercice étudiait la diagonalisabilité d'une matrice 2×2 définie à l'aide de 2 paramètres. La question 3 a mal été comprise et la question 4 n'a pas été traitée par les candidat·es.

Le second exercice s'intéressait à une série dont les coefficients étaient définis à l'aide d'un schéma de Bernoulli. La première question n'a été bien traitée à la présentation que par un·e candidat·e (parmi 4). La question 2a a bien été traitée, soit par récurrence, soit via une étude de fonction simple. Les questions suivantes, difficiles, n'ont été que brièvement abordées.

Planche 1 du 19/6/21. Dans le premier exercice, il fallait d'abord étudier une fonction trigonométrique et tracer son graphe. On s'intéressait ensuite à un couple de fonctions pour lequel une certaine quantité était préservée au cours du temps. En question 3, une suite de couples de fonctions était introduite, et on étudiait l'évolution de la quantité précédente en fonction des itérations. La représentation graphique a posé problème même lorsque les questions préliminaires étaient correctement traitées. De même, les équations de cercles sont mal maitrisées. La restitution d'un tel exercice, long avec plusieurs questions simples, est délicate ; les candidat·es s'en sont bien sorti·es.

Dans l'exercice 2, on construisait un projecteur à partir de deux projecteurs qui commutent. La caractérisation du noyau a été bien traitée. Celle de l'image, plus délicate, a été traitée dans la séance de questions par plusieurs candidat·es, avec de l'aide pour interpréter $q(\mathrm{Ker}(p))$.

Planche 2 du 19/6/21. Le premier exercice portait sur l'étude d'une suite dont les termes sont définis récursivement. Il fallait montrer sa convergence vers une limite indépendante du premier terme. Dans cet exercice, on a noté des difficultés à manipuler la continuité. Le théorème de la bijection est souvent appliqué sans grande précaution. On a vu de bonnes idées de plusieurs candidat·es qui, avec un peu plus de sens critique, auraient pu conclure l'exercice.

Dans le second exercice, ont montrait que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors X et $X+Y$ ne le sont pas sauf si X est constante. Cet exercice a été laborieux pour les candidat·es qui ne voyaient pas clairement quel rôle jouait l'indépendance, et bien traité par les autres. Le cas où la variable X est constante a déstabilisé les candidat·es.

Planche 1 du 22/6/21. Dans le premier exercice, on se demandait quand une matrice à coefficients aléatoires était inversible ou diagonalisable. Les candidat·es s'en sont plutôt bien sorti·es sur ce mélange d'analyse et de probabilité. On a observé encore une fois des difficultés pour déterminer les valeurs propres d'une matrice 2×2.

Le deuxième exercice s'intéressait à la maximisation de $x \in [0,1] \mapsto xf(x)$ avec f une fonction dérivable décroissante de 1 à 0. Le fait qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint ses bornes n'est pas acquis. On a vu, au mieux, des explications basées sur le théorème de Rolle. La fin de la planche portait sur des exemples ; plusieurs candidat·es ont eu du mal à manipuler la définition introduite dans l'énoncé. La condition sur la décroissance dans la dernière question n'a été résolue que par une personne.

Planche 2 du 22/6/21. Dans l'exercice d'algèbre linéaire, on s'intéressait aux propriétés des matrices dont une certaine puissance est nulle. Beaucoup de candidat·es ont cherché à faire travailler leur mémoire, souvent défaillante, et ont connu des séances de questions difficiles.

Dans le deuxième exercice, on caractérisait une fonction par sa dérivée puis on étudiait la comportement asymptotique d'une suite géométrique. Ce point a bloqué presque tou·tes les candidat·es, qui n'ont pas reconnu une suite géométrique. La dernière question a été peu abordée.

Planche 1 du 23/6/21. Le premier exercice portait sur un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[x]$ qui faisait décroitre le degré. On s'intéressait à son noyau et à ses valeurs propres. L'exercice a été bien réussi. Les candidat·es qui ont voulu écrire la matrice dans la base canonique ont souvent donné sa transposée.

Dans le deuxième exercice, ont étudiait une fonction définie comme une intégrale avec des bornes variables, et en particulier à son prolongement en 0. La dérivée a été trouvée dans la plupart des cas, sans erreur de traitement des bornes. La dérivabilité n'a en revanche pas souvent été justifiée. Le théorème des accroissements finis a été bien utilisé, mais les candidat·es n'ont pas pensé spontanément à utiliser un développement limité dans la dernière question.

Planche 2 du 23/6/21. Dans le premier exercice, on s'intéressait à l'aire d'un triangle délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la tangente à une courbe. Exploiter le dessin était important dans cet exercice.

Le second exercice, en grande partie classique, s'intéressait à la diagonalisation des projecteurs. Nous avons demandé la démonstration de résultats de cours sur les projecteurs lorsqu'ils étaient utlisés. La réécriture matricielle de la question 1 a posé des difficultés aux candidat·es et les deux dernières questions n'ont jamais été traitées.

Planche 1 du 24/6/21. Dans l'exercice 1, la modélisation d'une expérience aléatoire menait à l'étude d'une suite arithmético-géométrique, constante dans le cas étudié. La méthode générale était connue, le fait que le premier terme soit nul a déconcerté les candidat·es.

Dans l'exercice 2, on étudiait une fonction de 2 variables, et en particulier son comportement à l'origine et ses points critiques. Les parties calculatoires de cet exercice ont été plutôt bien traitées. Les meilleur·es candidat·es ont compris qu'il fallait encadrer $f(x, y)$ pour obtenir la continuité, sans parvenir à mener leur piste au bout.

Planche 2 du 24/6/21. L'exercice 1 était consacré à la construction de contre-exemples autour de la diagonalisation des matrices 2×2. Nous avons toujours demandé des détails sur les résultats de diagonalisation, en particulier quand il n'y a qu'une seule valeur propre. Le mot « homothétie » est souvent prononcé, sans que l'argument ne soit maitrisé.

Dans le deuxième exercice, on étudiait la limite, puis un équivalent, d'une suite définie grâce à une intégrale. L'utilisation d'une minoration pour montrer la divergence de la suite a été difficile.

Planche 1 du 25/6/21. On s'intéressait dans le premier exercice au critère de d'Alembert. Si celui-ci est généralement connu, sa démonstration a posé des difficultés, notamment la manipulation de la définition d'une limite. L'application a bien été traitée.

Dans le second exercice, on regardait un sous-espace vectoriel de matrices dont toutes les diagonales sont constantes. Le calcul de la dimension a dérouté plusieur·es candidat·es. Les calculs ont été bien menés dans l'ensemble et certain·es candidat·es ont réussi à trouver l'inverse dès la présentation.

Planche 2 du 25/6/21. Le premier exercice s'intéressait à quelques propriétés des lois géométriques. Si l'analyse de la seconde question a souvent été menée convenablement, la synthèse a systématiquement posé problème. La question (1b) n'a été réussie que par un·e candidat·e.

Le second exercice étudiait une suite géométrique de nombres complexes. Il fallait vérifier que la formule connue pour les suites réelles fonctionnait encore dans ce cadre. On faisait ensuite varier la raison avec N et regardait la limite du N-ème terme de la suite.