Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit $n \geq 4$ un entier et soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$. On note D la variable aléatoire égale au déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & Z \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer $\mathbb{P}\big(\{D = 0\} \cap \{Y = 1\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{D = 0\} \cap \{Y = 0\}\big)$.

(2) Montrer que $\mathbb{P}(D = 0) > \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^2$.

(3) Les événements D et Y sont-ils indépendants ?

On note Δ le discriminant de la fonction polynômiale de la variable x égale au déterminant de la matrice $M - xI$, où I est la matrice identité de $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$.

(4) Montrer que $\mathbb{P}(\Delta > 0 \mid Y > 0) = 1$.

(5) Montrer que l'événement « La matrice M est diagonalisable » est certain.

⋆⋆⋆

Exercice 2.

(1) On considère, pour $\alpha > 0$, la fonction définie de $]0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ par

$$f_\alpha(x) = \frac{\sin(x^\alpha)}{x}.$$

(1a) Montrer que $f_\alpha(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

(1b) Justifier que f_α est dérivable et calculer sa dérivée.

(1c) Trouver une valeur de α pour laquelle f'_α tend vers 0 en $+\infty$, et une autre pour laquelle f'_α n'a pas de limite.

(2) Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

(2a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$g(n+1) - g(n) = g'(x_n).$$

(2b) On suppose que, en $+\infty$, g admet une limite ℓ et g' admet une limite ℓ'. Montrer que $\ell' = 0$.