Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Une fonction polynomiale $p \in \mathbf{R}[x]$ est dite *positive* si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $p(x) \geq 0$.

(1) Donner un exemple d'une fonction polynomiale positive non constante.

(2) Montrer que le degré d'une fonction polynomiale positive p non nulle est pair et que son coefficient dominant est strictement positif, c'est-à-dire que l'on peut écrire

$$p(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

avec $a_{2n} > 0$.

(3) On considère **dans cette question** une fonction polynomiale $p : x \mapsto a_2x^2 + a_1x + a_0$ avec $a_2 > 0$.

(3a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a_2, a_1 et a_0 pour que p soit positive.

(3b) Montrer alors qu'il existe une fonction polynomiale p_1 de degré 1 et une fonction polynomiale p_0 de degré 0 telles que $p(x) = p_1(x)^2 + p_0(x)^2$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

On pourra utiliser le résultat suivant, qu'on ne demande pas de démontrer : si p est une fonction polynomiale de degré pair et de coefficient dominant positif, alors il existe un réel x_0 tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad p(x) \geq p(x_0).$$

(4) On considère une fonction polynomiale positive p et on note x_0 un nombre réel tel que $p(x) \geq p(x_0)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe un entier k non nul, un réel α et une fonction polynomiale q non nulle en x_0, tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on ait $p(x) = (x - x_0)^{2k}q(x) + \alpha^2$.

(5) Montrer que, si p est fonction polynomiale positive de degré $2n$, alors il existe $p_0, \ldots, p_n$ des fonctions polynomiales (éventuellement nulles) telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$p(x) = p_0(x)^2 + \cdots + p_n(x)^2.$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. On considère p matrices colonnes $X_1, \ldots, X_p$ dont les coordonnées sont notées par $X_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{p,j} \end{pmatrix}$, pour $1 \leq j \leq p$. On introduit la matrice $X = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$.

(1) Donner la dimension de l'image de $X_1X_1^{\mathrm{T}}$, où X_1^{T} désigne la transposée de X_1.

(2) Soit $1 < k < p$. Montrer que $\sum_{\ell=1}^{k} X_\ell X_\ell^{\mathrm{T}}$ n'est pas inversible.

(3) Montrer que $\sum_{\ell=1}^{p} X_\ell X_\ell^{\mathrm{T}} = XX^{\mathrm{T}}$.

(4) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $\sum_{\ell=1}^{p} X_\ell X_\ell^{\mathrm{T}}$ soit inversible.