Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}_n[x]$ des fonctions polynomiales de degré au plus n. On définit l'application

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[x] \\ P(x) & \longmapsto & x\,P''(x) - 2P'(x) \end{array}.$$

(1) Montrer que u est un endomorphisme.

(2) Calculer $\mathrm{rg}(u)$ et $\ker(u)$.

(3) Trouver les valeurs propres de u.

(4) u est-il diagonalisable ?

⋆⋆⋆

Exercice 2. On introduit la fonction $\arctan$ définie comme l'unique fonction telle que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan(\tan(x)) = x\,.$$

On rappelle que cette fonction est dérivable sur $\mathbf{R}$ et vérifie $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(1) Tracer l'allure de la courbe représentative de $\arctan$ sur $\mathbf{R}$.

Pour tout $x > 0$, on définit

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t\,.$$

(2) Montrer que Φ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et calculer $\Phi'(x)$ pour $x > 0$.

(3) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\ln(2)\arctan(x) \leq \Phi(x) \leq \ln(2)\arctan(2x)\,.$$

(4) En déduire que Φ est continue en 0.

(5) Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c(x) \in]0, x[$ tel que $\Phi(x) = x\,\Phi'(c(x))$.

(6) Montrer que Φ est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et que sa dérivée est continue.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit une matrice $N \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ pour laquelle il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $N^k = 0$.

(1) Donner un exemple d'une telle matrice.

(2) Trouver les valeurs propres de N.

(3) La matrice N est-elle diagonalisable ?

(4) Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ une autre matrice.

(4a) On suppose que A commute avec N. Montrer que A est inversible si et seulement si $A + N$ est inversible.

(4b) Montrer que ce n'est plus vrai si A et N ne commutent pas. *On pourra chercher un contre-exemple avec $n = 2$.*

(5) On suppose ici que $N^{n-1} \neq 0$ et $N^n = 0$. On prend $X_0 \in \mathbf{R}^n$ tel que $N^{n-1}X_0 \neq 0$. Montrer que $(X_0, NX_0, \ldots, N^{n-1}X_0)$ forme une base de $\mathbf{R}^n$. Écrire N dans cette base.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère deux réels $a > 0$ et $y_0 \in \mathbf{R}$ fixés, ainsi qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) = -af(t) \\ f(0) = y_0 \end{cases} . \tag{1}$$

(1) On pose $g : t \in \mathbf{R} \mapsto f(t)\,e^{at}$.

(1a) Calculer la dérivée g' de g.

(1b) En déduire l'expression de f.

(2) On fixe un réel $\delta > 0$ et on introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$u_0 = y_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = u_n - a\delta u_n\,.$$

(2a) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $u_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

(2b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(3) On suppose dorénavant que cette dernière condition est vérifiée et on considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $e_n = u_n - f(n\delta)$.

(3a) Montrer que $e_{n+1} = (1 - a\delta)e_n + a\displaystyle\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \big(f(u) - f(n\delta)\big)\mathrm{d}u$.

(3b) En déduire que $|e_{n+1}| \leq (1 - a\delta)\,|e_n| + \dfrac{ay_0\delta^2}{2}$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On considère une variable aléatoire X uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et on pose $Y = X^2$.

(1) Donner la loi de Y.

(2) Montrez que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

(3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère une partie non vide A de $\mathbf{R}^n$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall u, v \in A,\ \forall t \in [0,1], \qquad tu + (1-t)v \in A \tag{C}$$

(1) Montrer que la propriété (**??**) est vérifiée dans le cas où A est un sous-espace vectoriel.

On suppose dorénavant que $n = 2$.

(2) Dessiner un exemple d'ensemble vérifiant la propriété (**??**).

(3) Dessiner un exemple d'ensemble ne vérifiant pas la propriété (**??**).

(4) On fixe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et on s'intéresse à la fonction $\varphi^A_{(a,b)} : (x, y) \in A \mapsto \|(x, y) - (a, b)\|$

(4a) Montrer que, si $(a, b) \in A$ alors la fonction $\varphi^A_{(a,b)}$ atteint sa borne inférieure en un unique point que l'on déterminera.

(4b) On suppose ici que $A = \{(x, y) \ : \ y = 1\}$ et (a, b) est quelconque. Calculer la borne inférieure de $\varphi^A_{(a,b)}$.

(4c) Vérifier que, pour tout (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(a, b) \in \mathbf{R}^2$,

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|^2 = 2\|(a, b) - (x_1, y_1)\|^2 + 2\|(a, b) - (x_2, y_2)\|^2 - 4\left\|(a, b) - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)\right\|^2$$

(4d) En déduire que, si $\varphi^A_{(a,b)}$ atteint sa borne inférieure, alors elle l'atteint en un unique point.

(4e) Construire un exemple où la fonction $\varphi^A_{(a,b)}$ n'atteint pas sa borne inférieure. *On se satisfera d'une justification informelle.*

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15min}}$*; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer la probabilité que A soit inversible.

(2) Calculer la loi du rang de A.

(3) Calculer la probabilité que la matrice A soit diagonalisable.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante, telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

(1) On s'intéresse à la fonction $x \in [0,1] \mapsto xf(x)$. Justifier que cette fonction admet un maximum. Dans la suite on le notere $M(f)$.

(2) Montrer que $0 \leq M(f) \leq 1$. Existe t-il une fonction f telle que $M(f) = 1$?

(3) Soit $f_p : x \in [0,1] \mapsto 1 - x^p$ où p est un entier supérieur ou égal à 1. Calculer $M(f_p)$ et déterminer sa limite quand $p \to +\infty$.

(4) *(4a)* Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b et c pour que la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie les hypothèses de l'énoncé.

(4b) Montrer que l'ensemble des graphes de toutes ces fonctions polynomiales remplit une zone du carrée $[0,1] \times [0,1]$ que l'on déterminera graphiquement.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Les questions sont indépendantes.

(1) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et soit $L \in \mathbf{R}_+^\star$. On s'intéresse à la variable aléatoire discrète X qui vaut $k \in \mathbf{N}$ quand Y appartient à l'intervalle $[kL, (k+1)L[$.

(1a) Montrer que X est bien définie et déterminer sa loi.

(1b) Peut-on choisir L pour que X et Y aient la même espérance ?

(2) Trouver les $\lambda > 0$ pour lesquels il existe une variable aléatoire discrète X telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$ et

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbb{P}(X = k+1) = \lambda \mathbb{P}(X = k).$$

(3) *(3a)* Soit $k \in \mathbf{N}$. Pour quel $x \in [0, 1]$ la quantité $x(1-x)^k$ est-elle maximale ? Interpréter ce résultat en terme de variable aléatoire.

(3b) Écrire la somme permettant de calculer l'espérance d'une loi géométrique. Quel est le plus grand terme de cette somme ?

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soient x_0 et y_0 deux nombres réels. Soit $h > 0$. On définit par récurrence, pour tout $n \geq 0$,

$$x_{n+1} = x_n - hy_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n + hx_n.$$

(1) On introduit le nombre complexe $z_n = x_n + iy_n$. Exprimer z_n en fonction de n et z_0.

(2) Calculer la limite de $x_n^2 + y_n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(3) Soit N un nombre entier. On définit h_N de telle sorte que $\arg(1 + ih_N) = \dfrac{2\pi}{N}$.

(3a) Montrer que $\sqrt{1 + h_N^2} = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$.

(3b) En prenant $h = h_N$, on définit la suite (z_n) comme dans la première question (cette suite dépend donc de N). On note $w_N = z_N$ le N-ème terme de cette suite. Montrer que $w_N \to z_0$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15min}}$*; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes strictement positifs telle que la suite de terme $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers ℓ.

(1) On suppose que $\ell < 1$.

(1a) Montrer qu'il existe un entier n_0, une constante $C > 0$, et une constante $\rho \in [0, 1[$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \leq C\rho^n$.

(1b) En déduire que la suite (u_n) et la série $\sum u_n$ convergent.

(2) On suppose que $\ell > 1$. Montrer que la suite (u_n) et la série $\sum u_n$ divergent.

(3) Soit (v_n) une suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + v_n^2$ pour $n \geq 0$. Étudier la convergence de la suite (v_n) et de la série $\sum_n \frac{1}{v_n}$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère une matrice

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & t_{-n} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-n+1} \\ t_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_{-1} \\ t_n & \dots & t_2 & t_1 & t_0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{R})$$

pour certains réels $t_{-n}, \ldots, t_{-1}, t_0, t_1, \ldots, t_n$. On note $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$.

(1) Montrer que l'ensemble des matrices de cette forme est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{R})$. Quelle est sa dimension ?

(2) On introduit la matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{R})$.

(2a) Soit $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Calculer Ux.

(2b) Montrer que U est inversible et calculer son inverse.

(2c) Montrer que $UT - TU = \begin{pmatrix} -f_n & -f_{n-1} & \cdots & -f_1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & f_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_n \end{pmatrix}$ où les f_i sont à déterminer.

On suppose dorénavant qu'il existe deux vecteurs x et y tels que $Tx = e_0$ et $Ty = (0, f_1, \ldots, f_n)$.

(3) Montrer en utilisant la question précédente qu'il existe une matrice M telle que $UT = TM$.

(4) Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$, $TM^k x = e_k$. En déduire que T est inversible et calculer son inverse.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15min}}$*; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1.

(1) On considère la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(t) = 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$.

(1a) Que valent le minimum et le maximum de la fonction h ?

(1b) Montrer que la fonction h est périodique de période π.

(1c) Déterminer l'ensemble des points en lesquels la fonction h s'annule.

(1d) Représenter le graphe de la fonction h sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, en faisant apparaitre les informations obtenues dans les questions précédentes et en spécifiant la valeur de $h(0)$.

(2) Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telles que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f'(t) = g(t) \qquad \text{et} \qquad g'(t) = -4f(t) \tag{E}$$

et, de plus, $f(0) = 3$ et $g(0) = 0$.

(2a) Montrer que pour tout nombre réel t, $4(f(t))^2 + (g(t))^2 = 36$.

(2b) En déduire que le point de coordonnées $(f(t), g(t))$ est compris entre le cercle centré en $(0,0)$ de rayon 3 et le cercle centré en $(0,0)$ de rayon 6.

(3) Soit a un nombre réel strictement positif. On considère les deux suites de fonctions définies par $f_0 = f$, $g_0 = g$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$f_{n+1} = f_n + a g_n \qquad \text{et} \qquad g_{n+1} = g_n - 4a f_n .$$

(3a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, il existe $E_n \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $E_n = 4(f_n(t))^2 + (g_n(t))^2$.

(3b) Exprimer E_n en fonction de n.

(3c) Montrer que la suite $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite qu'on déterminera.

(3d) Trouver l'ensemble des entiers n tels que $E_n \geq 2E_0$.

(4) Si $f = h$ (fonction de **??**), est-il possible de trouver une fonction g telle que le couple (f, g) vérifie (**??**) ?

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Soient p et q deux projecteurs de $\mathbf{R}^n$ tels que $p \circ q = q \circ p$. On pose

$$u = p + q - q \circ p .$$

(1) Montrer que u est un projecteur.

(2) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

(3) Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(p) \oplus q(\mathrm{Ker}(p))$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. On considère une suite de n urnes contenant chacune a boules blanches et b boules noires. Une boule de la première urne (choisie uniformément au hasard) est transférée dans la seconde, ensuite une boule de la seconde urne (choisie indépendamment et uniformément au hasard) est transférée à la troisième, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'une boule de la $n-1$-ième urne (choisie indépendamment et uniformément au hasard) soit transférée à la n-ième. On note p_n la probabilité qu'une boule choisie uniformément au hasard dans la n-ième urne soit blanche.

(1) Trouver une relation de récurrence vérifiée par $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.

(2) Déterminer p_n.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. On considère la fonction

$$f : (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \begin{cases} (x+y)\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1) Étudier la fonction $x \in \mathbf{R} \mapsto f(x,x)$.

(2) Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{I}_0 = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ f(x,y) = 0\big\}$.

(3) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

(4) Montrer que $f(x,y) \to 0$ lorsque $x^2+y^2 \to 0$.

(5) Montrer que la fonction $y \in \mathbf{R} \mapsto f(0,y)$ n'est pas dérivable en 0.

(6) Calculer les dérivées partielles de f à l'ordre 1.

(7) On considère un point critique $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de f.

  (7a) Montrer que $x = y$ ou $x = -y$.

  (7b) Trouver les quatre valeurs possibles de (x,y).

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15min}}$*; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soient a et b deux réels et soit M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & -b \end{pmatrix}.$$

(1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice soit inversible.

(2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice soit diagonalisable.

(3) Soient $\lambda < \mu$ deux réels. Déterminez a et b de sorte que les valeurs propres de M soient λ et μ puis déterminez une base de vecteurs propres de M.

(4) Soit $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ une matrice ayant deux valeurs propres distinctes. Montrer que A est semblable à la matrice M pour des coefficients a et b bien choisis.

⋆⋆⋆

Exercice 2.

(1) Soit $x > 0$ un réel. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$.

(2) Soit $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On considère les variables aléatoires

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{(1/2 + X_k)^k}{k} \quad \text{et} \quad S = \lim_{N\to\infty} S_N.$$

(2a) Montrer que, pour tout $y \geq 0$, pour tout entier $k \geq 1$, $(1+y)^k \geq 1 + ky$.

(2b) Montrer que $\displaystyle\left\{ S_{4N} < \frac{N}{2} \right\} \subset \left\{ \sum_{k=1}^{4N} X_k \leq N \right\}$.

(2c) Montrer que $\displaystyle\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{4N} X_k \leq N \right) \leq \frac{1}{N}$.

(2d) En déduire que $\mathbb{P}(S = +\infty) = 1$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère l'application

$$\Phi : P(x) \in \mathbf{R}_{2n}[x] \mapsto (x^2 - 1)\, P'(x) - 2nx\, P(x)\,.$$

(1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_{2n}[x]$.

(2) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que la fonction $f_\lambda : x \in \,]0,1[\, \mapsto (1+x)^{n-\frac{\lambda}{2}}(1-x)^{n+\frac{\lambda}{2}}$ vérifie la relation

$$\forall x \in \,]0,1[\,, \qquad (x^2-1)\, f_\lambda'(x) = (2nx + \lambda) f_\lambda(x)\,.$$

(3) Montrer que Φ est diagonalisable.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Une joueuse joue à la belote en ligne. Elle s'arrête lorsqu'elle gagne une partie, et continue sinon. Les parties sont indépendantes les unes des autres. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de parties jouées.

(1) On suppose pour l'instant que chaque partie est gagnée avec probabilité $\frac{1}{2}$.

- *(1a)* Donner la loi de X et le nombre moyen de parties jouées.
- *(1b)* Pour pouvoir participer à une partie, la joueuse paye 10 jetons. En cas de victoire, elle gagne 15 jetons, et rien en cas de défaite. Quelle est l'espérance du nombre de jetons gagnés (jetons payés déduits) ?

(2) En réalité, la probabilité de gagner la k-ème partie est $a_k \in \,]0,1[$.

- *(2a)* Que vaut $\mathbb{P}(X = i)$?
- *(2b)* Dans le cas où $a_k = \dfrac{1}{k+1}$, montrer que $\mathbb{E}[X] = +\infty$.
- *(2c)* Dans le cas où la suite (a_k) est croissante, montrer que $\mathbb{E}[X] < \infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1.

(1) *(1a)* Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le nombre réel a pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

(1b) Trouver deux matrices de $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ diagonalisables dont la somme n'est pas diagonalisable.

(2) Soit A une matrice carrée diagonalisable. Montrer que A^2 est également diagonalisable.

(3) *(3a)* Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Calculer $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^2$.

(3b) Trouver une matrice $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ non diagonalisable telle que A^2 est diagonalisable.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ par

$$u_n = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x\,.$$

(1) Justifier que (u_n) est bien définie et étudier son sens de variation.

(2) On définit, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$v_n = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad w_n = \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x\,.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $v_n \geq \dfrac{\ln(n+1)}{e}$ et $0 \leq w_n \leq \dfrac{1}{e}$.

(3) Donner la limite de la suite (u_n).

(4) On cherche maintenant à obtenir un résultat plus précis.

(4a) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$ est convergente.

(4b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x \leq I\,.$$

(4c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1$.

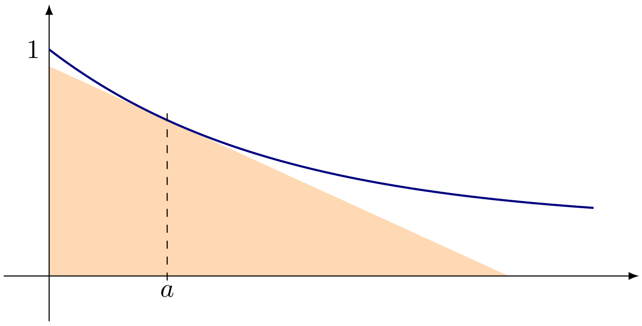
Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15min}}$; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, positive, décroissante, telle que $f(0) = 1$, et telle que $f''(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$. Soit $a \in [0, +\infty[$. On considère le triangle délimité par l'axe des abscisses, l'axe de ordonnées et la tangente de f au point d'abscisse a (voir graphique), et on s'intéresse à son aire, notée $\mathcal{A}(a)$.



(1) Soit $a \in [0, +\infty[$. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

(2) Montrer que le triangle est entièrement sous le graphe de f.

(3) Que vaut $\mathcal{A}(0)$?

(4) Montrer que $\mathcal{A}(a) = \dfrac{(af'(a) - f(a))^2}{-2f'(a)}$.

(5) Montrer que f a une limite en $+\infty$ et, dans le cas où cette limite est non nulle, déterminez la limite de $\mathcal{A}$.

(6) Calculer $\mathcal{A}$ et sa limite dans le cas où $f : x \mapsto e^{-x}$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit p et un projecteur de $\mathbf{R}^n$.

(1) Montrer qu'il existe un entier r tel que la matrice de p est semblable à

$$\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

où $0_{r,s}$ désigne la matrice nulle de $\mathbf{M}_{r,s}(\mathbf{R})$ et I_r la matrice identité de $\mathbf{M}_r(\mathbf{R})$.

(2) Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$.

(3) Soit q et un projecteur de $\mathbf{R}^n$ de même rang que p. Montrer qu'il existe deux endomorphisme u et v tels que

$$p = u \circ v \ \text{ et } \ q = v \circ u$$

Indication. On pourra raisonner sur les matrices.

(4) Soit p et q deux projecteurs qui s'écrivent $p = u \circ v$ et $q = v \circ u$. Montrer qu'ils ont même rang.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15min}}$*; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit x un nombre réel positif. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 & = x \\ u_{n+1} & = e^{-u_n} \end{cases}.$$

(1) Montrer qu'il existe un unique réel $\ell > 0$ tel que $\ell = e^{-\ell}$.

(2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

(3) Soient $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont monotones.

(4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

(5) Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ une fonction continue vérifiant la propriété : $\forall y \geq 1\,,\ f\left(y^{-1}\right) = f(\ln(y))$.
Montrer que f est une fonction constante.

⋆⋆⋆

Exercice 2.

(1) Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes. Calculer la covariance de X et Y puis la covariance de X et $X+Y$. Ces deux dernières variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

(2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $b_1 < b_2 < \cdots < b_m$, respectivement.

(2a) Quelle sont les valeurs minimale et maximale que peut prendre $X+Y$?

(2b) Montrer que X et $X+Y$ ne peuvent pas être indépendantes sauf si X est constante.

(3) Soit X une variable de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$, et Y une variable indépendante à valeurs dans $\mathbf{N}$.

(3a) Soit $k \in \mathbf{N}$. Exprimer $\mathbb{P}(\{X+Y=k\}\cap\{X=1\})$ et $\mathbb{P}(\{X+Y=k\}\cap\{X=0\})$ en fonction de probabilités qui ne dépendent que de Y et du paramètre de X.

(3b) Montrer que X et $X+Y$ ne sont pas indépendantes.