Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit une matrice $N \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ pour laquelle il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $N^k = 0$.

(1) Donner un exemple d'une telle matrice.

(2) Trouver les valeurs propres de N.

(3) La matrice N est-elle diagonalisable ?

(4) Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ une autre matrice.

(4a) On suppose que A commute avec N. Montrer que A est inversible si et seulement si $A + N$ est inversible.

(4b) Montrer que ce n'est plus vrai si A et N ne commutent pas. *On pourra chercher un contre-exemple avec $n = 2$.*

(5) On suppose ici que $N^{n-1} \neq 0$ et $N^n = 0$. On prend $X_0 \in \mathbf{R}^n$ tel que $N^{n-1}X_0 \neq 0$. Montrer que $(X_0, NX_0, \ldots, N^{n-1}X_0)$ forme une base de $\mathbf{R}^n$. Écrire N dans cette base.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère deux réels $a > 0$ et $y_0 \in \mathbf{R}$ fixés, ainsi qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) = -af(t) \\ f(0) = y_0 \end{cases} . \tag{1}$$

(1) On pose $g : t \in \mathbf{R} \mapsto f(t)\, e^{at}$.

(1a) Calculer la dérivée g' de g.

(1b) En déduire l'expression de f.

(2) On fixe un réel $\delta > 0$ et on introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$u_0 = y_0 \qquad \text{et} \quad \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = u_n - a\delta u_n\,.$$

(2a) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $u_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

(2b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(3) On suppose dorénavant que cette dernière condition est vérifiée et on considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $e_n = u_n - f(n\delta)$.

(3a) Montrer que $e_{n+1} = (1 - a\delta)e_n + a \displaystyle\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \big(f(u) - f(n\delta)\big)\mathrm{d}u$.

(3b) En déduire que $|e_{n+1}| \leq (1 - a\delta)\,|e_n| + \dfrac{ay_0\delta^2}{2}$.