Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On considère une suite de n urnes contenant chacune a boules blanches et b boules noires. Une boule de la première urne (choisie uniformément au hasard) est transférée dans la seconde, ensuite une boule de la seconde urne (choisie indépendamment et uniformément au hasard) est transférée à la troisième, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'une boule de la $n-1$-ième urne (choisie indépendamment et uniformément au hasard) soit transférée à la n-ième. On note p_n la probabilité qu'une boule choisie uniformément au hasard dans la n-ième urne soit blanche.

(1) Trouver une relation de récurrence vérifiée par $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$.

(2) Déterminer p_n.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère la fonction

$$f : (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \begin{cases} (x+y)\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1) Étudier la fonction $x \in \mathbf{R} \mapsto f(x,x)$.

(2) Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{I}_0 = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ f(x,y) = 0\big\}$.

(3) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

(4) Montrer que $f(x,y) \to 0$ lorsque $x^2+y^2 \to 0$.

(5) Montrer que la fonction $y \in \mathbf{R} \mapsto f(0,y)$ n'est pas dérivable en 0.

(6) Calculer les dérivées partielles de f à l'ordre 1.

(7) On considère un point critique $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de f.

(7a) Montrer que $x = y$ ou $x = -y$.

(7b) Trouver les quatre valeurs possibles de (x,y).