Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1.

(1) *(1a)* Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le nombre réel a pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

(1b) Trouver deux matrices de $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ diagonalisables dont la somme n'est pas diagonalisable.

(2) Soit A une matrice carrée diagonalisable. Montrer que A^2 est également diagonalisable.

(3) *(3a)* Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Calculer $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^2$.

(3b) Trouver une matrice $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ non diagonalisable telle que A^2 est diagonalisable.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ par

$$u_n = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \mathrm{d}x\,.$$

(1) Justifier que (u_n) est bien définie et étudier son sens de variation.

(2) On définit, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$v_n = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad w_n = \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \mathrm{d}x\,.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $v_n \geq \dfrac{\ln(n+1)}{e}$ et $0 \leq w_n \leq \dfrac{1}{e}$.

(3) Donner la limite de la suite (u_n).

(4) On cherche maintenant à obtenir un résultat plus précis.

(4a) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} \mathrm{d}x$ est convergente.

(4b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \mathrm{d}x \leq I\,.$$

(4c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1$.