Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1.

(1) Soient $A, B \in \mathbb{R}$. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\forall x \in]0,1[, \qquad f'(x) = \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}\right) f(x).$$

Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]0,1[,\ f(x) = cx^A(x-1)^B$.

Indication. On pourra considérer la fonction $g(x) = \frac{f(x)}{x^A(x-1)^B}$.

On fixe un entier $n \geq 2$ et on introduit $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieur ou égal à n. On définit l'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & X(X-1)P' - n(X+1)P. \end{array}$$

(2) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux nombres réels A_λ et B_λ (qui dépendent de λ et de n) tels que

$$\forall x \in]0,1[, \quad \frac{n(x+1)+\lambda}{x(x-1)} = \frac{A_\lambda}{x} + \frac{B_\lambda}{x-1}.$$

(4) Montrer que Φ est diagonalisable.

* * *

Exercice 2. Considérons un tournoi qui se déroule selon les modalités suivantes :

— au temps 1, les joueurs J_0 et J_1 s'affrontent,

— à chaque temps $n > 1$, un nouveau joueur J_n affronte le vainqueur du match au temps $n-1$.

Soit G_n l'événement : « au temps n, le joueur J_n gagne ». Supposons que les événements $(G_n)_{n\geq 1}$ sont indépendants, et que $\mathbb{P}(G_n) = p \in]0,1[$ pour tout $n \geq 1$.

Un joueur est déclaré vainqueur du tournoi dès qu'il parvient à remporter 5 matchs consécutifs. Pour chaque $n \geq 1$, considérons l'événement E_n : « aucun joueur n'a remporté le tournoi à l'issue du match au temps n ».

(1) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout $n \in \{1,2,3,4,5\}$.

(2) Justifier que la suite $(\mathbb{P}(E_n))_n$ converge.

(3) Montrer que $\mathbb{P}(E_n) \to 0$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 3$ un entier. Une urne contient n pièces équilibrées. Il se trouve que $n-1$ d'entre elles sont normales : elles possèdent une face "face" et une face "pile". La dernière, truquée, possède deux faces "face". On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de cette pièce.

(1) Quelle est la probabilité qu'on obtienne "face" pendant les n premiers lancers ?

(2) Sachant que l'on a obtenu "face" pour les n premiers lancers, quelle est la probabilité d'avoir pris la pièce truquée ? Quelle est la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini ?

* * *

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel et p un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$, différent de l'endomorphisme nul et de l'endomorphisme identité. En notant $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E, soit H l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \qquad H(u) = \frac{1}{2}\left(u \circ p + p \circ u\right).$$

Soient λ une valeur propre de H et u un vecteur propre associé.

(1) Montrer que $(2\lambda - 1)(p \circ u - u \circ p) = 0$.

(2) On suppose dans cette question que $p \circ u = u \circ p$.

  (a) Montrer que si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$, alors $p - \lambda \mathrm{Id}_E$ est inversible (où Id_E désigne l'endomorphisme identité de E).

  (b) Montrer que $\lambda = 0$ ou que $\lambda = 1$.

  (c) Réciproquement, montrer que $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ sont des valeurs propres.

(3) On suppose dans cette question que $\lambda = \frac{1}{2}$.

  (a) Montrer que pour tout $x \in \operatorname{Ker} p$, $u(x) \in \operatorname{Im} p$.

  (b) Montrer que pour tout $x \in \operatorname{Im} p$, $u(x) \in \operatorname{Ker} p$.

  (c) Réciproquement, montrer que $\lambda = \frac{1}{2}$ est une valeur propre.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Sur les plateformes de *production participative*, des tâches qu'on peut accomplir en ligne (comme l'annotation d'image) sont confiés à des personnes. On va supposer ici que les tâches consistent simplement à répondre à une question par oui ou par non. Pour modéliser la difficulté des tâches et la qualification des personnes pour celles-ci, on introduit les hypothèses suivantes. Pour une question donnée, on considère que chaque personne a :

— une probabilité p d'être *experte*, c'est à dire de connaître la réponse à la question. Si elle ne connaît pas la réponse, la personne répond au hasard ;

— une probabilité ϵ d'être *malveillante*, c'est-à-dire de donner la mauvaise réponse exprès lorsqu'elle connaît la bonne réponse.

L'expertise et la bienveillance de chaque personne sont supposées indépendantes, de même que les caractéristiques des différentes personnes.

(1) On fixe une question. Exprimer en fonction de p et ϵ la probabilité qu'une personne donne la bonne réponse à cette question. À quelle condition cette probabilité est-elle strictement plus grande que $1/2$? Dans la suite de l'exercice, on supposera cette condition vérifiée.

Pour augmenter la probabilité d'obtenir une bonne réponse, on va se fier à la “sagesse des foules”, et poser cette même question à un nombre $n > 2$ de personnes (supposé pair). On choisit alors comme réponse une réponse majoritaire, c'est-à-dire une réponse donnée par plus de 50% des personnes. On note C_n l'événement “la réponse obtenue est correcte”.

(2) Soit N le nombre de personnes expertes et R le nombres de bonnes réponses. Donner les lois de N et R.

(3) Les variables aléatoires N et R sont-elles indépendantes ?

(4) Si $x > y$ et si X suit une loi binomiale de paramètres n et x, on admet que $\mathbb{P}(X \leq ny) \leq \exp(-2n(x-y)^2)$. Montrer que

$$\mathbb{P}(C_n) \geq 1 - \exp\left(-n\frac{p^2(1-2\epsilon)^2}{2}\right).$$

* * *

Exercice 2. Soit $\mathcal{C}^0$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0$, on définit la fonction G_f par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_f(x) = \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que si f est croissante sur $\mathbb{R}$, alors G_f est croissante sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit $f \in \mathcal{C}^0$ une fonction telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} G_f(x) = 0$.

On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} G : \mathcal{C}^0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^0 \\ f & \mapsto & G_f \end{array}$$

On admet qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathcal{C}^0$.

(3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction f_a définie par $f_a(x) = e^{ax}$ pour $x \in \mathbb{R}$ est un vecteur propre de G.

(4) Montrer que $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathrm{Sp}(G)$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Dans des systèmes dits de « radio intelligente », des équipements radios (par exemples des objets connectés) peuvent sélectionner de manière adaptative sur quel canal fréquentiel communiquer, de sorte à maximiser la qualité de leurs communications. On note K le nombre total de canaux fréquentiels disponibles et M le nombre d'objets connectés utilisant ces canaux, avec $M < K$. En général, l'algorithme implémenté dans chaque objet est « conscient » du nombre K de canaux, mais ignore le nombre total M des objets utilisant le système. Une possibilité est alors de chercher à l'*estimer*, en effectuant des communications aléatoires.

À chaque instant $t = 1, 2, \ldots$, les M objets sélectionnent simultanément et de manière indépendante un canal uniformément au hasard parmi les K canaux et tentent de l'utiliser pour communiquer un message. Chaque objet observe alors si la communication a été un succès (ce qui arrive si l'objet est le seul à sélectionner le canal), ou un échec (si d'autres objets ont sélectionné le même canal, ce qui entraîne une collision).

(1) On fixe un objet et on note p la probabilité que sa communication échoue à l'instant t. Montrer que

$$p = 1 - \left(1 - \frac{1}{K}\right)^{M-1}.$$

Soit N_n le nombre total de communications échouées par l'objet lors des n premiers essais.

(2) Calculer $\mathbb{E}[N_n]$. En déduire un estimateur sans biais $\hat{p}_n$ de la probabilité d'échec de communication p.

On introduit l'estimateur

$$\hat{M}_n = \left[1 + \frac{\ln(1-\hat{p}_n)}{\ln\left(1 - \frac{1}{K}\right)}\right],$$

où $[x]$ désigne l'entier de plus proche du réel x.

(3) Exprimer M en fonction de p et K. Montrer que si $\left|\frac{\ln \frac{1-\hat{p}_n}{1-p}}{\ln\left(1-\frac{1}{K}\right)}\right| < 1/2$, alors $\hat{M}_n = M$.

(4) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\left(|\hat{p}_n - p| \leq c\right) \subseteq \left(\hat{M}_n = M\right)$.

(5) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\hat{M}_n = M\right) = 1$.

* * *

Exercice 2. Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

(1) Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $u \circ v$, montrer que λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.

(2) Montrer que si E est de dimension finie, alors cette propriété reste valable pour $\lambda = 0$.

(3) Comparer les spectres de AB et BA lorsque A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(4) Si $E = \mathbb{R}[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et u, v sont les endomorphismes définis par $u(P) = XP$ et $v(P) = P'$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$, comparer les spectres de $u \circ v$ et de $v \circ u$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Considérons une urne contenant deux boules : une verte et une rouge. Ajoutons-y des boules successivement en suivant le protocole ci-dessous :

— à chaque étape $n \geq 1$, on tire une boule au hasard de l'urne. Si elle est verte, on la remet dans l'urne et on rajoute une boule verte et une boule rouge. Si elle est rouge, on la remet dans l'urne et on rajoute deux boules rouges.

(1) Déterminer b_n le nombre de boules dans l'urne à l'issue de l'étape n pour $n \geq 1$.

Notons V_n le nombre de boules vertes à l'issue de l'étape $n \geq 1$ (et posons $V_0 = 1$).

(2) Quel est le support de V_n ?

(3) Calculer $\mathbb{P}(\text{on ajoute une boule verte à l'étape } n | V_{n-1} = k)$ pour $n \geq 1$ et k appartenant au support de V_{n-1}.

(4) Montrer que $\mathbb{P}(\text{on ajoute une boule verte à l'étape } n) = \frac{1}{2n}\mathbb{E}(V_{n-1})$.

(5) Relier $\mathbb{E}(V_n)$ et $\mathbb{E}(V_{n-1})$.

Indication : On pourra introduire une variable aléatoire X_n qui vaut 1 si on ajoute une boule verte à l'étape n, 0 sinon et exprimer V_n en fonction de V_{n-1} et X_n.

(6) En déduire une expression de $\mathbb{E}(V_n)$.

(7) Montrer que $\mathbb{E}(V_n) \sim C\sqrt{n}$ pour une constante $C > 0$ qu'on déterminera.

On pourra utiliser le fait que $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ *lorsque* $n \to \infty$.

* * *

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel. Une *involution* de $\mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = \mathrm{Id}_E$, où Id_E désigne l'endomorphisme identité.

(1) Soient a et b deux endorphismes bijectifs de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant

$$a \circ b \circ a = b \qquad \text{et} \qquad b \circ a \circ b = a.$$

Montrer que $a^2 = b^2$ et que a^2 est une involution.

(2) Soient a et b deux involutions de $\mathcal{L}(E)$.

(a) Montrer que $\mathrm{Im}(a \circ b - b \circ a) \subset \mathrm{Im}(a - b) \cap \mathrm{Im}(a + b)$.

Indication. On pourra calculer $(a + b) \circ (a - b)$.

(b) Montrer que $\mathrm{Im}(a - b) \cap \mathrm{Im}(a + b) \subset \mathrm{Im}(a \circ b - b \circ a)$.

Indication. Si $u \in \mathrm{Im}(a - b) \cap \mathrm{Im}(a + b)$, on pourra justifier et utiliser l'existence de $x \in E$ et $y \in E$ tels que $2a(u) = (a \circ b - b \circ a)(x - y)$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞.

(1) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et $n \geq 1$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t.$$

On suppose qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = \int_0^{ax} f(t) \mathrm{d}t.$$

(2) Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \geq 0$.

(3) Montrer que f est la fonction nulle.

* * *

Exercice 2. Soit $k \geq 2$ un entier et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{k}}$.

(1) Soit $j \geq 0$ un entier. Si j est un multiple de k, que vaut ω^j ?

(2) Pour tout entier $0 \leq \ell \leq k-1$, montrer que $\left|1 + \omega^\ell\right| = \left|\omega^{-\ell/2} + \omega^{\ell/2}\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\pi \ell}{k}\right)\right|$.

(3) Soit $j \geq 0$ un entier. Calculer la quantité

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j}$$

suivant si j est un multiple de k ou non.

(4) Montrer que

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ multiple de } k}}^{n} \binom{n}{j} = \frac{1}{k} 2^n + \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^{k-1} (1 + \omega^\ell)^n.$$

(5) Soit X_n le nombre de piles obtenus dans une succession de n lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Montrer que la probabilité que X_n soit un multiple de k converge lorsque $n \to +\infty$ et calculer la limite.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0$.

(1) Montrer que $\mathrm{rg}(f^2) \leq \dim \mathrm{Ker}\, f$ et que $\mathrm{rg}(f) \leq \dim \mathrm{Ker}(f^2)$.

(2) Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(f^2) \leq n$.

(3) Démontrer que $2\mathrm{rg}(f^2) \leq \mathrm{rg}(f)$.

Indication. On pourra considérer l'application linéaire $g : \mathrm{Im}(f) \to E$ qui à $x \in \mathrm{Im}(f)$ associe $f(x)$.

* * *

Exercice 2. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $X \prec Y$ si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{P}(Y \geq t).$$

(1) (a) Soit $N \geq 0$ un entier et F_N la fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} F_N : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & \lambda & \mapsto & 1 - \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}. \end{array}$$

Montrer que F_N est croissante.

(b) On suppose que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Montrer que $X \prec Y$ si, et seulement si, $\lambda \leq \mu$.

(2) (a) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction bornée. En posant $f(-1) = 0$, montrer que

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{\infty} (f(n) - f(n-1)) \mathbb{P}(X \geq n).$$

(b) Montrer que $X \prec Y$ si, et seulement si, pour toute fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ croissante et bornée,

$$\mathbb{E}\left(h(X)\right) \leq \mathbb{E}\left(h(Y)\right).$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Pour un entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes, n colonnes et à coefficients réels. Si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note M^{T} la transposée de M qui est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient placé à la ligne i et à la colonne j vaut $m_{j,i}$. Soit Φ l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & A - A^{\mathsf{T}}. \end{array}$$

On définit de plus l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques par

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A = A^{\mathsf{T}}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A = -A^{\mathsf{T}}\}.$$

(1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Déterminer Ker Φ et montrer que Im $\Phi = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(3) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(4) Montrer que les seules valeurs propres de Φ sont 0 et 2.

(5) Montrer que Φ est diagonalisable.

* * *

Exercice 2. Soit $a > 0$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes, de même loi et qui admettent une espérance.

(1) Montrer que

$$n\mathbb{P}(X_1 > an) \leq \frac{1}{a} \sum_{k > an} k\mathbb{P}(X_1 = k).$$

(2) Montrer que $n\mathbb{P}(X_1 > an) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

(3) Montrer que

$$\frac{1}{n\mathbb{P}(X_1 > an)} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} X_k > an\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Interprétez ce résultat.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle à densité notée f, à support dans $\mathbb{R}_+$. Les deux jeux J_1 et J_2 suivants vous sont proposés. Vous commencez par choisir un nombre $c > 0$.

Jeu J_1 : Si $X > c$, vous gagnez c, sinon rien.

Jeu J_2 : Si $X > c$, vous gagnez c, sinon vous perdez c.

On note $G_1(c)$ l'espérance du gain dans le jeu J_1 et $G_2(c)$ l'espérance du gain dans le jeu J_2.

(1) On suppose uniquement dans cette question que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Soit $m_1 = \sup_{c\geq 0} G_1(c)$ la plus grande espérance possible de votre gain dans le jeu J_1, et soit $m_2 = \sup_{c\geq 0} G_2(c)$ la plus grande espérance possible de votre gain dans le jeu J_2.

   (a) Déterminer la valeur de m_1.

   (b) Comparez m_1 et m_2.

(2) Montrer que $\sup_{c\geq 0} G_2(c)$ est un nombre réel strictement positif.

(3) On suppose que X admet une espérance. Montrer $\sup_{c\geq 0} G_1(c) < \infty$.

(4) A-t-on toujours $\sup_{c\geq 0} G_1(c) < \infty$?

* * *

Exercice 2. Par définition, un projecteur u d'un espace vectoriel E est un endomorphisme de E tel que $u^2 = u$ (où u^2 désigne la composée $u \circ u$).

(1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

(2) Soit v un projecteur de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont ses valeurs propres ? Justifier que v est diagonalisable.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant les deux hypothèses suivantes :

— ni u, ni $-u$ n'est un projecteur ;

— u^2 est un projecteur de rang 1.

(3) Montrer que 0 est valeur propre de u et qu'il possède exactement une autre valeur propre, égale à 1 ou à -1. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

(4) Justifier que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) \neq \{0\}$

(5) Si 1 est valeur propre de u, justifier qu'il existe une base dans lequel sa matrice est A.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. On définit la fonction $h(x) = x - \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$.

(1) Montrer que pour tout $x \geq 1$, il existe un unique $u \in [1, +\infty[$ tel que $h(u) = x$.
On note cette unique solution $h^{-1}(x)$.

(2) Montrer que pour tout $x \geq 1$,
$$h^{-1}(x) = \inf_{z \geq 1} \frac{z}{z-1}(x - 1 + \ln(z)).$$

(3) Montrer que que $x \leq h^{-1}(x) \leq x + \frac{x}{x-1} \ln(x)$.

(4) Proposer une minoration de l'unique $x_0 < -1$ tel que $x_0 e^{x_0} = -\frac{1}{e^2}$.

* * *

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ un entier.

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0$$
et en déduire une factorisation du polynôme $P(z) = 1 + z + \cdots + z^{n-1}$.

(2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$1 - e^{\mathrm{i}x} = -2\mathrm{i} \sin(x/2) e^{\mathrm{i}x/2}.$$

(3) Montrer que
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

(4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\sin(nx) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 2$ un entier. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On choisit deux boules au hasard sans remplacement, puis deux boules au hasard sans remplacement et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de boules.

(1) Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements de probabilités non nulles d'un espace probabilisé, montrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

(2) Calculer la probabilité p_n qu'à chaque fois on ait choisi une boule blanche et une boule rouge.

(3) Déterminer un équivalent simple de p_n lorsque $n \to \infty$.
Indication. On pourra utiliser le fait que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ lorsque $n \to \infty$.

* * *

Exercice 2. Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note $\mathrm{Tr}(M) = M_{1,1} + M_{2,2} + M_{3,3}$ sa trace.

(1) Montrer qu'il existe des nombres réels a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 tels que $M_{i,j} = a_i b_j$ pour tout $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$.

(2) On introduit les vecteurs colonnes associés

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Justifier que $M = AB^T$ et calculer $B^T A$, où R^T désigne la transposée de la matrice R.

(3) Montrer que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$.

(4) On suppose que $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

(5) On suppose que $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, M \oplus \mathrm{Ker}(M - \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$. En déduire que M est diagonalisable.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soient $A > 0$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\int_0^\infty f(u)\mathrm{d}u$ converge et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que

$$\forall x \geq 0, \qquad g(x) \leq A + \int_0^x f(u)g(u)\mathrm{d}u.$$

Le but de cet exercice est de montrer que g est bornée. À cet effet, considérons la fonction $Z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x \geq 0, \qquad Z(x) = \left(A + \int_0^x f(s)g(s)\mathrm{d}s\right) e^{-\int_0^x f(s)\mathrm{d}s}.$$

(1) Calculer $Z'(x)$ pour tout $x \geq 0$.

(2) Conclure.

(3) Donner un exemple de tels A, f, g.

* * *

Exercice 2. Après avoir corrigé beaucoup de copies, le jury de mathématiques du concours B/L souhaite mettre en place une méthode de correction innovante. On considère un problème de mathématiques constitué de trois parties de difficulté égale, appelées A, B, C. Pour un candidat choisi au hasard, on note $X_A \in \{0, \ldots, 20\}$ (resp. X_B, X_C) la variable aléatoire donnant sa note pour le problème A (resp. B, C). Pour corriger sa copie, le jury propose deux méthodes :

(Méthode 1) il attribue la note usuelle M, qui est la moyenne des trois notes.

(Méthode 2) il choisit un problème I parmi $\{A, B, C\}$ uniformément au hasard (et indépendamment des notes), corrige uniquement ce problème, et attribue la note $N = X_I$.

L'objectif de cet exercice est de comparer les notes M et N. On note m_A, m_B, m_C les moyennes et $\sigma_A^2, \sigma_B^2, \sigma_C^2$ les variances des variables aléatoires X_A, X_B, X_C.

(1) On suppose dans cette question que les variables aléatoires X_A, X_B, X_C sont indépendantes. Calculer l'espérance et la variance de M (en fonction de $m_A, m_B, m_C, \sigma_A^2, \sigma_B^2, \sigma_C^2$).

Dans la suite, si $\mathcal{E}$ est un événement, on note $\mathbb{1}_{\mathcal{E}}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si $\mathcal{E}$ est réalisé, et 0 sinon.

(2) Soit $\mathcal{E}$ un événement. Justifier que $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{E}}] = \mathbb{P}(\mathcal{E})$.

(3) Exprimer la variable aléatoire N en fonction des variables aléatoires X_A, X_B, X_C et $\mathbb{1}_{(I=A)}$,$\mathbb{1}_{(I=B)}$ et $\mathbb{1}_{(I=C)}$.

(4) Calculer $\mathbb{E}[N]$ (en fonction de $m_A, m_B, m_C, \sigma_A^2, \sigma_B^2, \sigma_C^2$).

(5) Calculer $\mathbb{E}[N^2]$ et en déduire la variance de N (en fonction de $m_A, m_B, m_C, \sigma_A^2, \sigma_B^2, \sigma_C^2$).

(6) On suppose dans cette question que les variables aléatoires X_A, X_B, X_C sont indépendantes. Comparer la variance de M et la variance de N.

(7) Conseillez-vous au jury de mettre en œuvre cette méthode l'année prochaine ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier.

(1) Soit $p \geq 1$ un entier. Montrer que $\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} n^{i-1} = \frac{(n+1)^p - 1}{n}$.

(2) Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Calculer A^p pour $p \geq 1$.

(3) Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice carrée de taille n définie par

$$b_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Calculer B^p pour $p \geq 1$.

Indication. On pourra exprimer B en utilisant A.

(4) Montrer que B est inversible et calculer son inverse.

* * *

Exercice 2. Soit (u_n) une suite de réels positifs décroissante et tendant vers 0. Soit (v_n) la suite définie par

$$v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \right) - n u_n.$$

(1) On suppose dans cette question que la série de terme général u_n converge. Montrer que (v_n) est bornée.

(2) On suppose dans cette question que la suite (v_n) est bornée.

(a) Calculer $v_n - v_{n-1}$.

(b) Montrer que la suite v_n converge.

(c) Montrer que la série de terme général $(n-1)(u_{n-1} - u_n)$ converge.

(d) Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (k-1)(u_{k-1} - u_k) \geq n u_n.$$

(e) Montrer que la série de terme général u_n converge.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ telles que $\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=1)$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & X \\ -1 & Y \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer la loi de la variable aléatoire $Z = \dim(\mathrm{Ker}(A))$.

(2) Calculer la probabilité que la matrice A soit diagonalisable.

* * *

Exercice 2. On considère la fonction

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}.$$

(1) Justifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

(2) Soit $g : \left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup \left]1, \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup \left]1, \frac{3}{2}\right], \qquad g(t) = \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}.$$

Montrer que g est prolongeable en une fonction continue sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

(3) Montrer que $\lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} g(t)\mathrm{d}t = 0$.

(4) En déduire que f est prolongeable par continuité en 1.

(5) Déterminer le tableau de variation de f.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2 - x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(1) Tracer le graphe de f.

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.

(2) Démontrer que si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge, alors sa limite vaut 1 ou -2.

(3) Démontrer que si $|u_0| > 2$, alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge.

(4) On suppose dans cette question que pour tout $n \geq 0$, $u_n \neq 1$ et $u_n \neq -2$.

   (a) On suppose que $u_n \to -2$ et on pose $h_n = u_n + 2$. Montrer que $h_{n+1}/h_n \to 4$ lorsque $n \to \infty$ et aboutir à une contradiction.

   (b) Montrer que la suite (u_n) n'a pas de limite.

(5) Trouver toutes les valeurs de u_0 pour lesquelles il existe un entier $n \geq 0$ tel que $u_n = 1$.

* * *

Exercice 2. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que u^k est l'endomorphisme nul. Soit S un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les deux hypothèses suivantes :

– pour tout $x \in S$, $u(x) \in$S ;

– $\mathbb{R}^n = S + \operatorname{Im} u$.

Montrer que $S = \mathbb{R}^n$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 2$ un entier. Deux urnes U et V contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule de U et une boule de V, et on note les numéros respectifs X et Y.

(1) Soit E_n l'événement « le rapport $\frac{X}{Y}$ est un nombre entier ».

  (a) Calculer $\mathbb{P}(E_3)$.

  (b) Calculer $\mathbb{P}(E_4)$.

(2) Montrer que

$$\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{n^2}\left(n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor\right),$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x (appelé la partie entière de x).

(3) En déduire un équivalent simple de $\mathbb{P}(E_n)$ lorsque n tend vers l'infini.

* * *

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ un entier. On définit la trace $\mathrm{Tr}(M)$ d'une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$. Dans tout l'exercice, on fixe A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Justifier que l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à une matrice M associe $f(M) = \mathrm{Tr}(AM)$ est linéaire et déterminer la dimension de son noyau.

(2) On définit l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivant :

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M + \mathrm{Tr}(AM)A \end{array}$$

Montrer que 1 est valeur propre de Φ et que l'espace propre associé est de dimension $n^2 - 1$.

(3) Supposons que Φ possède une valeur propre $\lambda \neq 1$.

Montrer qu'un vecteur propre associé est nécessairement proportionnel à la matrice A.

(4) À quelle condition sur A l'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?